

## HAUPTAUFSÄTZE

### Strenge Berechnung der Eigenspannungen, die in plastisch aufgeweiteten Hohlzylindern nach der Entlastung zurückbleiben.

Von Ruth Moufang in Essen (jetzt Frankfurt a.M.).

*Die Berechnung der Eigenspannungen und der Restaufweitung erfolgt auf Grund des Verfestigungsgesetzes von R. Schmidt, der Inkompressibilität und des Ansatzes von de St.-Venant-Mises für einen bei festgehaltener Länge durch hydrostatischen Innendruck aufgeweiteten Hohlzylinder mit darauffolgender Entlastung. Das R. Schmidtsche Verfestigungsgesetz ist dabei auch zur theoretischen Beschreibung der aus dem Zugversuch mit Belastungsumkehr experimentell gegebenen Entfestigungskurven des Werkstoffes herangezogen.*

*Considering the strain hardening law of R. Schmidt, the incompressibility, and the law of de St. Venant-Mises, the residual tensions and deformations of a hollow cylinder are computed in the case that the cylinder is widened out by a hydrostatic inner pressure, and then discharged, provided that the length is permanently constant. The strain hardening law of R. Schmidt is also applied to the theoretical description of the desolidification curves of the material resulting from the stress experiment with a conversion of stress.*

*Le calcul des tensions et déformations résiduelles est basé sur la loi d'écrouissage de Schmidt, sur l'incompressibilité et sur le théorème de St. Venant-Mises, applicable au cas d'un cylindre creux de longueur invariable, chargé d'une pression interne hydrostatique et déchargé par la suite. La loi de Schmidt est également utilisée à donner une explication théorique des courbes de ramollissement des matériaux, obtenus expérimentalement par un essai de tension à charge réversible.*

Расчет собственных напряжений и остаточных расширений основан на законе упрочнения Шмидта, на нежимаемости и на законе Сан-Венана-Мизеса, приложенному к растяжению пустотелого цилиндра постоянной длины внутренним гидростатическим давлением с последующей разгрузкой. Закон упрочнения Шмидта используется для теоретического объяснения кривой разупрочнения материала, полученной испытанием на растяжение с реверсивной нагрузкой.

#### Einleitung.

Das Diagramm des Zugversuchs bietet die physikalische Grundlage, an der sich das Studium plastischer Formänderungen bei mehrachsigen Spannungszustand zu orientieren hat. Es ist meines Wissens noch nicht versucht worden, die aus dem Zugversuch bei der Entlastung bekannte Hysterese auf dreiaxige Spannungszustände zu verallgemeinern, um die Eigenspannungen, die nach der Entlastung aus dem plastischen Zustand in einem Körper verbleiben, theoretisch zu erfassen. Dieser Weg wird im folgenden besprochen zur Berechnung der Eigenspannungen und bleibenden Formänderungen in einem Hohlzylinder, der bei festgehaltener Länge und kräftefreiem Außenmantel durch Innendruck vollplastisch oder teilweise plastisch aufgeweitet und darauf durch Wegnahme des Innendrucks bei festgehaltener Länge entlastet wird. Die Ermittlung dieser Eigenspannungen ist nicht nur theoretisch deswegen von Interesse, weil zu erwarten ist, daß nach der hier entwickelten Methode auch andere Eigenspannungsprobleme einer theoretischen Behandlung zugänglich gemacht werden können, sondern auch für die Praxis in allen Fällen, wo es sich um die überelastische Beanspruchung hohlzylindrischer Körper handelt, die wiederholt belastet und entlastet werden, z. B. bei probeweiser Belastung von Hochdruckbehältern vor der Inbetriebnahme.

Die Beschränkung auf konstante Länge des Hohlzylinders ist zur Vereinfachung der mathematischen Theorie vorgenommen worden. Der Fall kräftefreier oder durch eine vorgegebene Kräfteverteilung belasteter Stirnflächen würde die Theorie sehr viel verwickelter gestalten. Die hier entwickelten Formeln gelten also nur für den Fall, daß während der Belastung durch Innendruck und der darauf folgenden Abnahme des Innendrucks nach Null auf den Stirnflächen beständig eine solche Verteilung von Normalkräften angreift, die gerade die Unveränderlichkeit der Zylinderlänge bewirkt.

Da der im Hohlzylinder sich ausbildende Spannungszustand dreiaxig ist, nehmen wir im folgenden als Maß für die Beanspruchung die Mises'sche Invariante des Spannungsdeviators,



die in Zylinderkoordinaten  $r, t, z$  auf Hauptspannungsachsen bezogen lautet

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 + \sigma_z^2 - \sigma_r \sigma_t - \sigma_t \sigma_z - \sigma_z \sigma_r}.$$

Sie nimmt in jedem Punkt des Hohlzylinders nach der Entlastung einen bestimmten Wert  $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{\text{rest}}$  an, der im folgenden nach einer Methode berechnet wird, die die physikalischen Vorgänge bei der Entlastung des Werkstoffs berücksichtigt: beim Zugversuch beschreibt die wahre Längsspannung  $\sigma_z$  als Funktion der Längsdehnung  $\varepsilon_z$  bei der Entlastung aus dem plastischen Zustand  $P$  (Abb. 1) zunächst eine gerade Linie, die zur H o o k e schen Geraden parallel verläuft. Um diese Verhältnisse auf einen mehrachsigen Spannungszustand zu verallgemeinern, kann man das R. S c h m i d t'sche Verfestigungsgesetz heranziehen, nach dem bei einer beliebigen elastischen oder plastischen Deformation eines Werkstoffes die zweite Invariante des Spannungsdeviators nur von der zweiten Invarianten  $\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}$  des Verzerrungsdeviators abhängt:

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = f(\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}) \dots \dots \dots (a),$$

wobei

$$\sqrt{(\mathfrak{E}')^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_t^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_r \varepsilon_t - \varepsilon_t \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_r}$$

und  $f$  eine für die Verfestigungseigenschaften des Werkstoffs charakteristische Funktion ist, die unabhängig ist von der speziellen Wahl der Belastung. Im elastischen Bereich ist  $f$  linear, und zwischen  $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}$  und  $\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}$  besteht Proportionalität. In Abb. 1 entspricht  $A$  der Fließgrenze. Die Verfestigungskurve  $l$ , hier geradlinig gezeichnet, charakterisiert das plastische Gebiet. Beim Zugversuch ist speziell

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_z \quad \text{und} \quad \sqrt{(\mathfrak{E}')^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_z,$$

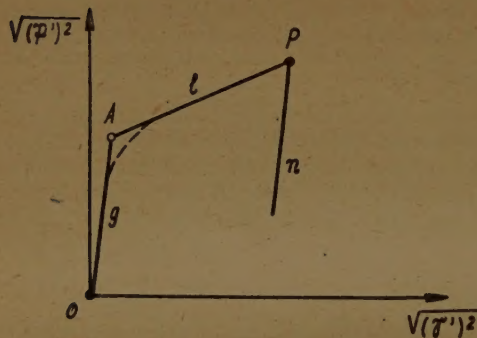


Bild 1.

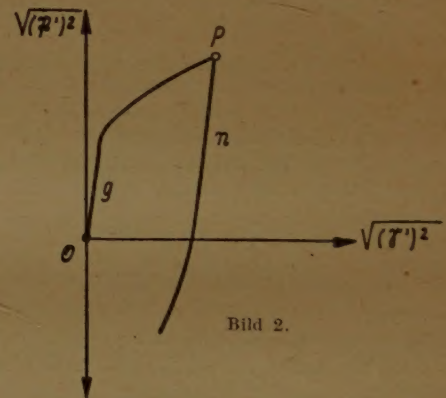


Bild 2.

wenn man die Inkompressibilität voraussetzt, also

$$\varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_z = 0$$

annimmt, so daß das H o o k e'sche Gesetz beim Zugversuch in der Form erscheint

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = \frac{2}{3} E \sqrt{(\mathfrak{E}')^2} \dots \dots \dots (a')$$

worin  $E$  der Elastizitätsmodul ist. Allgemein bezeichnen wir in (a)  $f$  als die Verfestigungsfunktion. Sie ist eine beständig wachsende Funktion, die für genügend kleine Werte von  $\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}$  linear ist und für größere Werte des Arguments praktisch in vielen Fällen wegen der schwachen Krümmung der Verfestigungskurve ebenfalls linearisiert werden kann. Der Entlastung aus dem plastischen Zustand entsprechend Punkt  $P$  (Abb. 2) entspricht eine Kurve  $n$ , die anfänglich zur H o o k e'schen Geraden  $g$  parallel verläuft und, nachdem die Fließgrenze der Belastungsumkehr überschritten ist, gekrümmte Gestalt annimmt. Dies sind die physikalischen Grundlagen, die der im folgenden entwickelten Theorie zugrunde liegen.

### § 1. Die Plastizitätsgesetze.

Wir nehmen an, daß der plastische Zustand durch die folgenden Gesetze beschrieben wird:

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = f(\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}) \quad (\text{Verfestigungsgesetz v. R. Schmidt}) \dots \dots \dots (a),$$



$$\frac{\mathfrak{P}'}{\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}} = \frac{\mathfrak{E}'}{\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}} \quad (\text{Ansatz von de St. Venant-Mises}) \dots \dots \dots (b),$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_z = 0 \quad (\text{Inkompressibilität}) \dots \dots \dots (c).$$

Das Gesetz (a) wurde bereits erörtert. Das Gesetz (b) besagt die Artgleichheit von Spannungs- und Verzerrungsdeviator. Die Gesetze (a) und (b) gelten gleichermaßen im plastischen wie im elastischen Bereich. Die Inkompressibilität gilt nur im plastischen Gebiet. Läßt man diese für die folgende Untersuchung unwesentliche Modifikation auch im elastischen zu, so beschreiben die Gesetze (a) bis (c) einheitlich das elastische wie das plastische Verhalten, wobei nur der Verlauf der Funktion  $f$  eine feinere Unterscheidung zwischen beiden Zuständen hervorruft.

Im folgenden werden die Verzerrungen stets als infinitesimal betrachtet, so daß die Verzerrungen linear von den Verschiebungen und ihren Ableitungen abhängen.

## § 2. Entwicklung der allgemeinen Formeln für die plastische Aufweitung von Hohlzylindern unter Innendruck bei konstanter Länge.

Sei  $u$  die radiale,  $w$  die achsiale Verschiebung. Wir beschränken uns beständig auf den Fall

$$\varepsilon_z = 0 \dots \dots \dots (1),$$

also

$$w = 0 \dots \dots \dots (1').$$

Wegen der Symmetrie des Problems hängen alle Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen nur von  $r$  ab.

Aus der Inkompressibilität folgt

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0,$$

also

$$u = \frac{c}{r} \dots \dots \dots (2),$$

wo  $c$  die Integrationskonstante ist. Bei dem hier vorliegenden Versuch ist  $c$  positiv. Die Verzerrungen werden dann

$$\varepsilon_r = -\frac{c}{r^2}, \quad \varepsilon_t = \frac{c}{r^2} \dots \dots \dots (3).$$

Die Gleichgewichtsbedingung reduziert sich auf die eine Gleichung

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \dots \dots \dots (4).$$

Die achsiale Spannung  $\sigma_z$  hängt linear von  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$  ab. In der Tat folgt aus Gl. (b) und (c)

$$2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_t = 0,$$

also

$$\sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2} \dots \dots \dots (5).$$

Damit geht  $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}$  in den einfachen Ausdruck über

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = \pm \frac{\sigma_t - \sigma_r}{\sqrt{2}} \dots \dots \dots (6).$$

Mit Hilfe von Gl. (c), (1) und (3) ergibt sich

$$\sqrt{(\mathfrak{E}')^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{c}{r^2} \dots \dots \dots (7).$$

Durch Integration von Gl. (4) folgt

$$\sigma_r = \text{const} + \int \frac{dr}{r} (\sigma_t - \sigma_r).$$

Nun ist wegen Gl. (a) und (b)

$$\sigma_t - \sigma_r = (\varepsilon_t - \varepsilon_r) \frac{f(\sqrt{(\mathfrak{E}')^2})}{\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}}$$

oder mit Gl. (3) und (7)

$$\sigma_t - \sigma_r = \sqrt{2} f \left( \sqrt{2} \frac{c}{r^2} \right) \dots \dots \dots (8).$$



Trägt man diesen Wert in das obige Integral ein, kommt

$$\sigma_r = \text{const} + \sqrt{2} \int \frac{dr}{r} f\left(\sqrt{2} \frac{c}{r^2}\right) \dots \dots \dots (9).$$

Die beiden hierin eingehenden Integrationskonstanten bestimmen sich aus den Oberflächenbedingungen: am inneren Mantel ( $r=r_i$ ) ist der Druck  $p_i = -\sigma_{ri}$  vorgeschrieben, am äußeren Mantel ( $r=r_a$ ) ist der Druck  $p_a = -\sigma_{ra}$  (oder der Druck Null) vorgeschrieben, wobei  $p_i - p_a$  positiv ist, also

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r \text{ plast}} &= -p_i + \sqrt{2} \int_{r_i}^r \frac{dr}{r} f\left(\sqrt{2} \frac{c}{r^2}\right) \\ -p_a &= -p_i + \sqrt{2} \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r} f\left(\sqrt{2} \frac{c}{r^2}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10),$$

wobei die Konstante  $c$  aus diesen beiden Gleichungen zu eliminieren ist. Die Funktion  $f$  ist dabei graphisch gegeben.

Die Funktion

$$H(c) = p_i - p_a - \sqrt{2} \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r} f\left(\sqrt{2} \frac{c}{r^2}\right)$$

ist eine monoton abnehmende Funktion von  $c$ , da  $f$  eine monoton wachsende Funktion seines Arguments ist. Für  $c=0$  wird  $H(0) = p_i - p_a > 0$ , für genügend große positive  $c$  wird  $H$  negativ, also existiert genau eine positive Nullstelle von  $H(c) = 0$ .

Durch Gl. (10) ist die Radialspannung völlig bestimmt. Für die Tangentialspannung  $\sigma_t$  und die Achsialspannung  $\sigma_z$  folgt wegen Gl. (4) und (5)

$$\sigma_{t \text{ plast}} = -p_i + \sqrt{2} \int_{r_i}^r \frac{dr}{r} f\left(\sqrt{2} \frac{c}{r^2}\right) + \sqrt{2} f\left(\sqrt{2} \frac{c}{r^2}\right) \dots \dots \dots (11)$$

$$\sigma_{z \text{ plast}} = -p_i + \sqrt{2} \int_{r_i}^r \frac{dr}{r} f\left(\sqrt{2} \frac{c}{r^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\sqrt{2} \frac{c}{r^2}\right) \dots \dots \dots (12).$$

Der plastische Zustand eines Volumelements des Hohlzylinders im Abstand  $r$  von der Rohrachse entspricht einem Punkt  $P$  auf der Verfestigungskurve mit den Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(\mathfrak{P}')^2} \text{ plast} &= f\left(\sqrt{2} \frac{c}{r^2}\right) \\ \sqrt{(\mathfrak{E}')^2} \text{ plast} &= \sqrt{2} \frac{c}{r^2} = \sqrt{2} \varepsilon_t \text{ plast} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13),$$

worin  $c$  durch die zweite Gl. (10) bestimmt ist für  $p_a = 0$ . Den verschiedenen Volumelementen auf einem Radiusvektor des Rohres entsprechen also wegen der Veränderlichkeit von  $r$  nach Gl. (13) verschiedene Punkte  $P$  auf der Verfestigungskurve. Für  $r=r_i$  erreicht die Beanspruchung  $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}$  und die tangentielle Dehnung  $\varepsilon_t$  ihren größten Wert.

### § 3. Der Fall geradliniger Verfestigung.

Wir setzen

$$f(\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}) = \alpha \sqrt{(\mathfrak{E}')^2} + \beta \dots \dots \dots (14)$$

mit konstantem  $\alpha$  und  $\beta$ . \*)

\*) Die Neigung der Verfestigungsgeraden ist durch  $\alpha$  bestimmt, die Konstante  $\beta$  ist praktisch

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_{fl},$$

wo  $\sigma_{fl}$  die Fließgrenze beim Zugversuch ist. Genau genommen hat der Punkt  $A$  in Abb. 1 die Koordinaten

$$\sqrt{(\mathfrak{E}')^2} = \frac{3\beta}{2E-3\alpha}, \quad \sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = \frac{2E\beta}{2E-3\alpha}.$$

Nun ist aber  $E$  groß gegen  $\alpha$ , so daß der letzte Ausdruck annähernd gleich  $\beta$  ist, also ist an der Fließgrenze

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = \beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{fl},$$

wie behauptet wurde.



Trägt man diesen Wert für  $f$  in die zweite Gl. (10) ein, so ergibt sich\*\*) nach Auswertung des Integrals

$$\alpha c = \left( p_i - p_a - \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \right) \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \dots \dots \dots (15)$$

und damit nach der ersten Gleichung (10), nach (11), (12), (13):

$$\sigma_{r_{\text{plast}}} = p_a - p_i + \sqrt{2} \ln \frac{r}{r_i} + \left( p_i - p_a - \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \right) \frac{r_a^2 (r^2 - r_i^2)}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \dots \dots \dots (10')$$

$$\sigma_{t_{\text{plast}}} = p_a - p_i + \sqrt{2} \beta \left( \ln \frac{r}{r_i} + 1 \right) + \left( p_i - p_a - \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \right) \frac{r_a^2 (r^2 + r_i^2)}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \dots \dots \dots (11')$$

$$\sigma_{z_{\text{plast}}} = p_a - p_i + \sqrt{2} \beta \left( \ln \frac{r}{r_i} + \frac{1}{2} \right) + \left( p_i - p_a - \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \right) \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \dots \dots \dots (12')$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{\text{plast}} &= \sqrt{2} \left( p_i - p_a - \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \right) \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} + \beta \\ \sqrt{(\mathfrak{S}')^2}_{\text{plast}} &= \sqrt{2} \varepsilon_{t_{\text{plast}}} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \left( p_i - p_a - \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \right) \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13').$$

Der Fall eines plastisch aufgeweiteten Hohlzylinders konstanter Länge, der nur unter Innendruck steht, ergibt sich daraus für  $p_a = 0$ . Die Spannungsverteilung in elastisch aufgeweiteten Hohlzylindern konstanter Länge ergibt sich aus den Formeln (10') bis (12'), indem man  $\beta = 0$  und  $\alpha = \frac{2}{3} E$  setzt.

#### § 4. Berechnung der Restbeanspruchung in dem Hohlzylinder nach der Entlastung bei geradlinigem Verfestigungsanstieg.

Läßt man nach einer plastischen Aufweitung den Innendruck  $p$  auf Null zurückgehen (der Außendruck  $p_a$  sei bei Belastung und Entlastung dauernd Null), so durchläuft jedes Volumenelement des Hohlzylinders eine Reihe von Zuständen, die im  $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}, \sqrt{(\mathfrak{S}')^2}$ -Diagramm einer gewissen geraden Linie  $n$  entsprechen, der Gesamtbereich dieser der Entlastung verschiedener Volumenelemente entsprechenden Geraden  $n$  ist in Bild 3 schematisch gezeichnet. Nach beendeter Entlastung, d. h. wenn der Innendruck auf Null zurückgegangen ist bei festgehaltener Hohlzylinderlänge, ist auf jeder Geraden ein gewisser Punkt  $B$  erreicht. Die Koordinaten von  $B$  liefern für jedes Volumenelement die Restbeanspruchung und die Restdehnung nach der Entlastung. Wir wollen die Koordinaten von  $B$  berechnen:

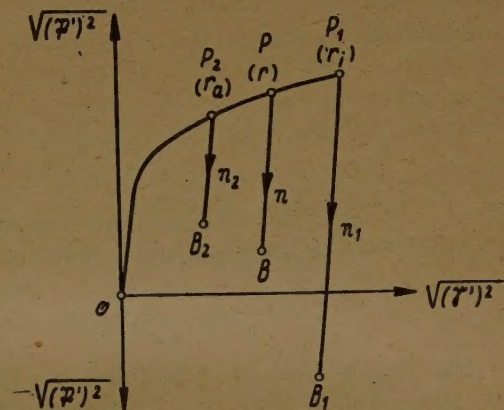


Bild 3.

Der Punkt  $P$ , entsprechend der Belastung mit dem Innendruck  $p$ , hat die Koordinaten gemäß (Gl. 13)

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(\mathfrak{S}')^2} &= \sqrt{2} \frac{c}{r^2} \\ \sqrt{(\mathfrak{P}')^2} &= \alpha \sqrt{2} \frac{c}{r^2} + \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16),$$

worin  $c$  bestimmt ist aus

$$p = \sqrt{2} \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r} f \left( \sqrt{2} \frac{c}{r^2} \right) \dots \dots \dots (17).$$

Setzt man in Gl. (17)  $f$  aus Gl. (14) ein, so wird

$$c = \frac{1}{\alpha} \left( p - \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \right) \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \dots \dots \dots (17').$$

\*\*) Diese Formeln wurden zum erstenmal von H. Wagner angegeben.



Die Parallele  $n$  zur Hooke'schen Geraden  $g$  hat die Gleichung

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = \frac{2}{3} E \left( \sqrt{(\mathfrak{E}')^2} - \sqrt{2} \frac{c}{r^2} \right) + \alpha \sqrt{2} \frac{c}{r^2} + \beta \quad (18)$$

mit  $c$  aus Gl. (17) bzw. (17').

Nun wiederholen sich die Überlegungen von § 3 in einer etwas allgemeineren Form, da Gl. (14) durch Gl. (18) zu ersetzen ist, die jetzt die Verfestigungsfunktion darstellt, deren Koeffizienten im Gegensatz zu früher nicht mehr konstant sind, sondern vom Parameter  $r$  abhängen. Dies beeinflusst die Berechnung des Integrals, das jetzt in Analogie zu

$$\int \frac{dr}{r} f(\sqrt{(\mathfrak{E}')^2})$$

zu bilden ist.

Wir bezeichnen die rechte Seite von Gl. (18) mit  $F(\sqrt{(\mathfrak{E}')^2})$ :

$$F(\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}) = \frac{2}{3} E \sqrt{(\mathfrak{E}')^2} + \sqrt{2} \frac{c}{r^2} \left( \alpha - \frac{2}{3} E \right) + \beta \quad (19)$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $E$  Konstante,  $c$  aus Gl. (17) bzw. (17').

Für  $\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}$  besteht dabei die Gleichung

$$\sqrt{(\mathfrak{E}')^2} = \sqrt{2} \frac{c'}{r^2} \quad (20),$$

worin  $c'$  eine zunächst beliebige, von  $c$  verschiedene Konstante ist, über die später verfügt wird.

Jetzt hat man das Gleichgewichtsproblem für einen Hohlzylinder zu lösen, der unter einem Innendruck  $p'$  (der gegen Null geht) und dem Außendruck Null steht, wobei die Plastizitätsgesetze (a), (b), (c) zu berücksichtigen sind, nur mit dem Unterschied, daß die frühere Verfestigungsfunktion  $f$  durch  $F$  gemäß Gl. (19) zu ersetzen ist.

Durch Überlegungen, die völlig analog zu denen aus § 2, § 3 verlaufen, ergibt sich

$$\sigma_r = -p' - \frac{2}{3} E c' \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_i^2} \right) - c \left( \alpha - \frac{2}{3} E \right) \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_i^2} \right) + \sqrt{2} \beta \ln \frac{r}{r_i} \quad (21)$$

$$0 = -p' - \frac{2}{3} E c' \left( \frac{1}{r_a^2} - \frac{1}{r_i^2} \right) - c \left( \alpha - \frac{2}{3} E \right) \left( \frac{1}{r_a^2} - \frac{1}{r_i^2} \right) + \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \quad (22).$$

Trägt man hierin für  $c$  seinen Wert aus Gl. (17') ein, so kommt

$$c' = \frac{3}{2E} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left[ p' - p \left( 1 - \frac{2E}{3\alpha} \right) - \sqrt{2} \beta \frac{2E}{3\alpha} \ln \frac{r_a}{r_i} \right] \quad (23).$$

Für  $p' = p$ , d. h. im Augenblick des Beginns der Entlastung (entsprechend Punkt  $P$  in Bild 3) ist offenbar  $c' = c$ . Für abnehmende Werte von  $p'$  nimmt  $c'$  ebenfalls ab. Nach der Entlastung, d. h. für  $p' = 0$ , erreicht  $c'$  seinen Minimalwert \*)

$$c'_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{r_a^2 r_i^2}{(r_a^2 - r_i^2)} \left[ p \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\alpha}{E} \right) - \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \right] \quad (24).$$

Aus dieser Gleichung folgt zusammen mit Gl. (17')

$$c'_0 = c - \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{E} \quad (25).$$

Durch  $c'_0$  ist die nach der Entlastung verbleibende Umfangsdehnung bestimmt

$$\varepsilon_{t \text{ rest}} = \frac{c'_0}{r^2} = \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \cdot \frac{1}{\alpha} \left[ p \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\alpha}{E} \right) - \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \right] \quad (26)$$

und daraus

$$\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}_{\text{rest}} = \sqrt{2} \varepsilon_{t \text{ rest}} \quad (27).$$

\*) Da nach Voraussetzung durch den Innendruck  $p$  der ganze Rohrquerschnitt plastisch geworden war, d. h.  $p \geq \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{3\alpha\beta}{\sqrt{2}(2E-3\alpha)} \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_i^2}$  gilt, ist  $c'_0 > 0$ .



## Die Umfangsdehnung

$$\epsilon_{t\text{plast}} = \frac{c}{r^2}$$

(infolge der plastischen Rohraufweitung) hat sich also verringert auf den Betrag

$$\epsilon_{t\text{rest}} = \frac{1}{r^2} \left( c - \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{3p}{2E} \right).$$

Ist  $c'_0$  ausgerechnet, so ergeben sich die Restspannungen und die Restbeanspruchung zu

$$\sigma_{r\text{rest}} = \sqrt{2} \beta \ln \frac{r}{r_i} - \frac{r_a^2 (r^2 - r_i^2)}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \quad \dots (28)$$

$$\sigma_{t\text{rest}} = \sqrt{2} \beta \left( \ln \frac{r}{r_i} + 1 \right) - \frac{r_a^2 (r^2 + r_i^2)}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \quad \dots (29)$$

$$\sigma_{z\text{rest}} = \sqrt{2} \beta \left( \ln \frac{r}{r_i} + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{2} \beta \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \ln \frac{r_a}{r_i} \quad \dots (30)$$

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{\text{rest}} = \beta \left( 1 - \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \ln \frac{r_a}{r_i} \right) \quad \dots (31)$$

$$\sqrt{(\mathfrak{S}')^2}_{\text{rest}} = \sqrt{2} \epsilon_{t\text{rest}} = \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \cdot \left[ p \left( 1 - \frac{3\alpha}{2E} \right) - \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \right] \quad \dots (32)$$

Diese Formeln lassen erkennen, daß die Eigenspannungen und die Restbeanspruchung nur von der Fließgrenze des Werkstoffes und von den Abmessungen abhängen; sie sind dagegen unabhängig von dem Innendruck, mit dem der Hohlzylinder belastet war, und unabhängig von der Steigung der Verfestigungskurven. Die Restdehnung dagegen hängt merklich vom ursprünglichen Innendruck und vom Verfestigungsanstieg ab.

Die Restbeanspruchung  $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{\text{rest}}$  ist negativ am Innenmantel, positiv am Außenmantel; sie erleidet also beim Übergang von innen nach außen einen Vorzeichenwechsel, mithin gibt es im Querschnitt eine Stelle, wo die Restbeanspruchung Null ist.

## § 5. Gültigkeitsgrenzen für die in § 4 entwickelten Formeln.

Den Gleichungen (28) bis (32) liegen folgende Voraussetzungen zugrunde:

1. Daß die Verfestigungskurve von R. Schmidt eine Gerade sei, eine Näherung, die in den meisten praktischen Fällen zulässig sein wird im Gebiet größerer plastischer Verformungen.
2. Daß während der Entlastung die Entfestigungskurve, die von jedem Volumenelement des Rohres durchlaufen wird, eine Gerade sei (Gerade  $n$  in Bild 3). Diese Annahme ist physikalisch jedoch nur solange zutreffend, als die Fließgrenze bei der Belastungsumkehr nicht wieder erreicht ist. Diese Grenze ist sicher nicht wieder erreicht, solange  $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{\text{rest}}$  positiv bleibt.

Die Erfahrung zeigt aber, daß bei vielen Stählen die Fließgrenze für Druck nach vorausgegangenem plastischen Zug und nachfolgender Belastungsumkehr praktisch auf Null herabgesetzt

ist. In solchen Fällen ist die Entfestigungskurve nach Überschreitung der  $\sqrt{(\mathfrak{S}')^2}$ -achse keine Gerade mehr, sondern eine gekrümmte Kurve (Bild 4). Die Berechnung der Restbeanspruchung nach § 4 bedarf dann einer Modifizierung, die in § 7 auseinandergesetzt wird.

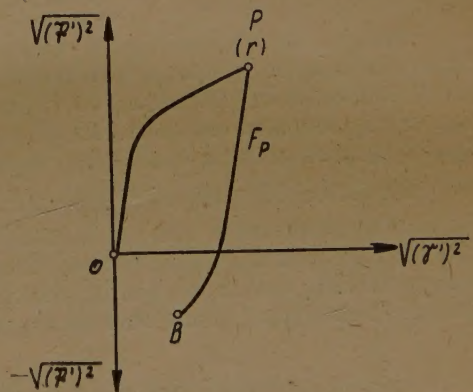


Bild 4.

## § 6. Interpretation der Formeln aus § 4 mit Hilfe des Superpositionsprinzips.

Es ist nicht uninteressant, auf folgenden Sachverhalt einzugehen: Die Restformänderung und die Restbeanspruchung (Gl. (28) bis (32)) werden auch erhalten mit Hilfe des Super-



positionsprinzips: von der Formänderung bzw. der Beanspruchung infolge des Innendrucks wird die Formänderung bzw. die Beanspruchung abgezogen, die sich für den Hohlzylinder bei elastischem Verhalten unter dem Innendruck  $p$  ergeben würde. In der Tat: die radiale und tangential Spannung eines Hohlzylinders der Abmessungen  $r_i$  und  $r_a$  bei Belastung durch Innendruck  $p$ , Außendruck Null und bei konstanter Zylinderlänge sind im elastischen Bereich

$$\sigma_{rel} = p \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left( 1 - \frac{r_a^2}{r^2} \right) \dots \dots \dots (33)$$

$$\sigma_{tel} = p \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left( 1 + \frac{r_a^2}{r^2} \right) \dots \dots \dots (34)$$

woraus folgt

$$(\sigma_t - \sigma_r)_{el} = 2p \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)}$$

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{el} = \sqrt{2} p \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \dots \dots \dots (35).$$

Andererseits liefert die erste Gleichung (13') für  $p_i = p$ ,  $p_a = 0$

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{pl} = \beta + \sqrt{2} \left( p - \sqrt{2} \beta \ln \frac{r_a}{r_i} \right) \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \dots \dots \dots (35')$$

so daß sich durch Subtraktion von Gl. (35) und (35') ergibt

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{pl} - \sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{el} = \beta \left( 1 - \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \ln \frac{r_a}{r_i} \right) \dots \dots \dots (36).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist identisch mit der rechten Seite der Gl. (31), so daß folgt

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{rest} = \sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{plast} - \sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{el} \dots \dots \dots (37).$$

Dies ist das Superpositionsprinzip der Beanspruchungen. Die Subtraktion der Gleichungen (10') und (33) bzw. (11') und (34) (für  $p_i = p$ ,  $p_a = 0$ ) liefert

$$(\sigma_{t_{pl}} - \sigma_{t_{el}}) - (\sigma_{r_{pl}} - \sigma_{r_{el}}) = \sqrt{2} \beta \left( 1 - \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2 (r_a^2 - r_i^2)} \ln \frac{r_a}{r_i} \right)$$

also nach Gl. (6)

$$\sqrt{(\mathfrak{P}'_{pl} - \mathfrak{P}'_{el})^2} = \sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{rest} \dots \dots \dots (38).$$

Dies ist das Superpositionsprinzip der Spannungen selbst. Das Superpositionsprinzip gelangt also hier in doppelter Form zur Anwendung. Der Grund dafür liegt darin, daß wegen der Beziehung Gl. (5) die Beanspruchung sich nach Gl. (6) auf eine lineare Funktion der Spannungen reduziert. Im allgemeinen Falle, wenn  $(\mathfrak{P}')^2$  kein vollständiges Quadrat der Spannungskomponenten ist, ist das Superpositionsprinzip nicht gültig.

Die Berechnung der Spannungen  $\sigma_{rel}$  und  $\sigma_{tel}$  ist nur eine Fiktion, da nach Voraussetzung der Hohlzylinder unter dem Innendruck  $p$  sich plastisch und nicht elastisch verhält. Trotzdem gibt das Operieren mit diesen fiktiven Größen ein richtiges Ergebnis. Aber dieses Ergebnis ist nicht a priori trivial, wenn auch häufig vom Superpositionsprinzip Gebrauch gemacht wird, ohne sich über die Zulässigkeit seiner Anwendung vorab Rechenschaft abzulegen.

## § 7. Berechnung der Restbeanspruchung bei beliebig gegebener Entfestigung.

Die Verfestigungskurve  $OP$  in Abb. 3 wird für den zu untersuchenden Stahl mit Hilfe des Zugversuchs graphisch ermittelt. Alsdann ist es nach den Überlegungen von § 2 möglich, für einen vorgegebenen Wert des Innendrucks  $p$  in jedem Punkt des Hohlzylinders die plastische Verformung und Beanspruchung zu ermitteln. Zum Studium des Entlastungsvorganges ist es darüber hinaus erforderlich, für jeden Punkt  $P$  der Verfestigungskurve gemäß Abb. 4 die Entfestigungskurve  $PB$  zu kennen. Sie wird ermittelt an einem Zugversuch mit darauf folgender Belastungsumkehr: die Zuglast wird bei einer bestimmten Höhe angehalten, allmählich auf Null herabgemindert und dann in eine Druckbeanspruchung verwandelt, die genügend hoch zu wählen ist. Dieser Versuch muß für mehrere hinreichend dicht liegende Punkte  $P$  der Kurve  $OP$  wiederholt werden.



Auf diese Weise wird der durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  der Abb. 3 bestimmte Bereich der  $(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}, \sqrt{(\mathfrak{E}')^2})$ -Ebene mit Entlastungskurven überdeckt. Sie haben die Gleichung

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = F_P(\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}) \quad \dots \quad (39).$$

Die Punkte  $P$  sind dabei eindeutig den Volumenelementen des Hohlzylinders zugeordnet, die auf einem Radiusvektor in verschiedener Entfernung von der Rohrachse liegen. Man kann also setzen

$$F_P(\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}) = F(r; \sqrt{(\mathfrak{E}')^2}).$$

Das Argument  $\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}$  ist ebenfalls eine Funktion von  $r$ :

$$\sqrt{(\mathfrak{E}')^2} = \sqrt{2} \frac{c'_0}{r^2}.$$

Nun ergibt sich die Restaufweitung und die Restbeanspruchung auf Grund schon durchgeführter Überlegungen zu

$$\sigma_{r_{\text{rest}}} = \sqrt{2} \int_{r_i}^r F\left(r; \frac{\sqrt{2} c'_0}{r^2}\right) \frac{dr}{r} \quad \dots \quad (40)$$

$$\sigma_{t_{\text{rest}}} = \sqrt{2} \int_{r_i}^r F\left(r; \frac{\sqrt{2} c'_0}{r^2}\right) \frac{dr}{r} + \sqrt{2} F\left(r; \frac{\sqrt{2} c'_0}{r^2}\right) \quad \dots \quad (41)$$

$$\sigma_{z_{\text{rest}}} = \sqrt{2} \int_{r_i}^r F\left(r; \frac{\sqrt{2} c'_0}{r^2}\right) \frac{dr}{r} + \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(r; \frac{\sqrt{2} c'_0}{r^2}\right) \quad \dots \quad (42)$$

wobei  $c'_0$  bestimmt ist durch die eindeutig lösbare Gleichung

$$0 = \int_{r_i}^{r_a} F\left(r; \sqrt{2} \frac{c'_0}{r^2}\right) \frac{dr}{r} \quad \dots \quad (43)$$

und weiter

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}_{\text{rest}} = F\left(r; \sqrt{2} \frac{c'_0}{r^2}\right) \quad \dots \quad (44)$$

$$\sqrt{(\mathfrak{E}')^2}_{\text{rest}} = \sqrt{2} \varepsilon_{t_{\text{rest}}} = \sqrt{2} \frac{c'_0}{r^2} \quad \dots \quad (45).$$

Die Berechnung des Integrals in diesen Gleichungen erfolgt mit Hilfe der Methode der numerischen Quadratur. Die Gleichung (43) hat genau eine zwischen 0 und der aus Gl. (17) bestimmten Konstanten  $c$  gelegene Wurzel  $c'_0$ :

$$K(c') = \sqrt{2} \int_{r_i}^{r_a} F\left(r; \sqrt{2} \frac{c'}{r^2}\right) \frac{dr}{r},$$

wobei der Integrand für verschiedene Werte des ersten Arguments verschiedene Funktionen des zweiten Arguments darstellt, ist eine monoton wachsende Funktion von  $c'$ , da die partielle Ableitung von  $F$  nach dem zweiten Argument positiv ist. Für  $c' = 0$  ist jedes  $F(r; 0) < 0$ ; für  $c' = c$  ist nach Definition

$$K(c) = \sqrt{2} \int_{r_i}^{r_a} f\left(\sqrt{2} \frac{c}{r^2}\right) \frac{dr}{r} = p > 0,$$

also hat  $K$  genau eine Nullstelle  $c'_0$  mit  $0 < c'_0 < c$ . Die Formeln (40) bis (45) stellen die allgemeine Lösung unseres Problems dar.



### § 8. Berechnung der Restbeanspruchung in einem durch Innendruck teilweise plastisch verformten Hohlzylinder.

Zum Schluß sei noch kurz die Berechnung der Restbeanspruchung in einem Hohlzylinder erörtert, der durch Innendruck nicht über den ganzen Querschnitt plastisch beansprucht war, sondern nur in der inneren Zone, in der äußeren Zone dagegen sich elastisch verhielt.

Die bisherigen Überlegungen bieten grundsätzlich keinen Unterschied zwischen plastischem und elastischem Verhalten. Beim Entlastungsvorgang fällt jede Entfestigungskurve  $PB$ , die von einem unterhalb der Fließgrenze gelegenen Punkt  $P$  ausgeht, mit der Hooke'schen Geraden zusammen; in diesem Fall ist die Restbeanspruchung Null, wie man schon von vornherein weiß.

In dem Falle, daß die Verfestigungskurve  $f$  geradlinig verläuft, läßt sich für das obige Problem eine explizite Lösung angeben, die hier kurz dargestellt sei:

Die Grenze zwischen dem plastischen und elastischen Bereich sei mit  $\varrho$  bezeichnet

$$r_i < \varrho < r_a.$$

Zwischen beiden Bereichen herrscht eine zunächst unbekannte radiale Pressung  $s$ , so daß die innere plastische Schicht unter dem Innendruck  $p$ , dem Außendruck  $s$  und die äußere elastische Schicht unter dem Innendruck  $s$ , dem Außendruck Null sich im Gleichgewicht befinden. Diese Kräfte bewirken in jedem Bereich eine Radialverschiebung

$$u_{pl} = \frac{c}{r}$$

$$u_{el} = \frac{C}{r}$$

Da der Zusammenhang des Materials gewahrt bleibt, sind diese Verschiebungen für  $r = \varrho$  einander gleich, woraus folgt

$$c = C.$$

Im plastischen Gebiet besteht nach Gl. (15) zwischen  $c$ ,  $\varrho$  und  $s$  die Gleichung

$$\alpha c = \left( p - s - \sqrt{2} \beta \ln \frac{\varrho}{r_i} \right) \frac{\varrho^2 r_i^2}{\varrho^2 - r_i^2} \dots \dots \dots (46).$$

Im elastischen Gebiet gilt eine entsprechende Gleichung, wobei  $\alpha$  durch  $\frac{2}{3} E$ ,  $\beta$  durch Null zu ersetzen ist:

$$\frac{2}{3} E c = s \frac{r_a^2 \varrho^2}{r_a^2 - \varrho^2} \dots \dots \dots (47).$$

Im elastischen Gebiet ist die Fließgrenze genau an der Begrenzung  $r = \varrho$  erreicht, das liefert

$$\sqrt{2} \frac{c}{\varrho^2} = \frac{3 \beta}{2 E - 3 \alpha} \dots \dots \dots (48).$$

Die Unbekannten  $c$ ,  $\varrho$ ,  $s$  sind jetzt aus den 3 Gleichungen (46) bis (48) zu eliminieren. Dabei ergibt sich für  $\varrho$  eine transzendente Gleichung, die sich näherungsweise auflösen läßt. Damit ist der elastisch-plastische Zustand des durch Innendruck belasteten Rohres vollständig bestimmt. Die Berechnung der Restbeanspruchung bietet dann keine Schwierigkeiten mehr auf Grund der in § 4 und § 7 auseinandergesetzten Methode.

### Zusammenfassung.

Es wird ein Verfahren entwickelt zur Berechnung der Restbeanspruchung und Restaufweitung eines Hohlzylinders, der durch Innendruck bei festgehaltener Länge vollplastisch oder elastisch-plastisch beansprucht und darauf durch Wegnahme des Innendrucks bei festgehaltener Länge entlastet wird. Als Plastizitätsgesetze sind das Verfestigungsgesetz von R. Schmidt, der Ansatz von St. Venant-Mises und die Inkompressibilität zugrunde gelegt. Der physikalische Entlastungsvorgang bei dreiaxigem Spannungszustand wird dabei an Hand des R. Schmidt'schen Verfestigungsgesetzes mit Hilfe der für den Zugversuch mit darauffolgender Belastungsumkehr gegebenen Entfestigungskurven des Werkstoffes theoretisch erfaßt.



# Laminare Strömung Newtonscher und Maxwellscher Flüssigkeiten.\*)

Von Hans Fromm in Alzey.

Das Maxwell'sche Stoffgesetz wird in Tensorform gegeben, wobei die Drehung neben der Schiebung in Erscheinung tritt. Bei ebener Strömung tritt eine schwingende Relaxation auf. In stationärer Laminarströmung bleibt die Schubspannung unter dem Werte des halben Schubmoduls; dementsprechend können bei der Rohr- bzw. Plattenströmung stabile und labile Bereiche der Geschwindigkeitsverteilung mit sprunghafter Druckverteilung auftreten. „Kreuzloch-Rohr“ zur Staudruckmessung. Beziehungen zur Strukturviskosität.

Representing the Maxwell substance law by tensors, the rotation is appearing additionally to the translation. In the case of plane current, there originates an oscillating relaxation. In the case of stationary laminar current, the shearing stress remains less than half of the modulus of shearing; according to that, the current through pipes or plates may cause stable or unstable ranges of velocity with a discontinuous pressure distribution. Tube with crosswise situated holes for the measurement of impact pressure. Relations to the structural viscosity.

La loi de la matière de Maxwell est démontrée sous la forme tensorielle et on observe l'apparition simultanée de translation et de rotation. Dans le cas d'un mouvement plan apparaît une relaxation oscillante. Dans un mouvement laminaire stationnaire la tension tangentielle reste au-dessous de la demi-valeur du module de translation; par conséquent, un mouvement de fluide dans les tuyaux ou entre deux lamelles peut donner lieu à la naissance de zones stables et instables de la distribution de vitesses, avec variations brusques de la pression. «Tuyau à ouvertures croisées» pour la mesure de la pression dynamique. Correlation avec la viscosité structurelle.

Максвелловский закон материи представлен в тензорной форме, содержащей вращение наряду со смещением. В случае плоского потока появляется колеблющаяся релаксация. При стационарном потоке напряжение сдвига не превосходит половины модуля сдвига. Соответственно этому при течении по трубам или между пластинами могут возникнуть зоны устойчивого и неустойчивого распределения скоростей с резкими скачками давления. „Трубка с крестообразным отверстием“ для измерения динамического давления. Связь со структурной вязкостью.

## 1. Das Stoffgesetz.

Bei Newtonschen Flüssigkeiten von der Viskosität  $\eta$  ist die Schubspannung  $\tau$  der Schiebungsgeschwindigkeit  $\dot{\gamma}$  proportional ( $\tau = \eta \dot{\gamma}$ ). Sie sind schubelastisch steif ( $G = \infty$ ).

In Maxwell'schen Flüssigkeiten mit dem Schubmodul  $G$  (Relaxationszeit  $T = \eta/G$ ) bringt auch die Drehung des Stoffes unter einem im Raume konstanten Spannungszustande elastische Verformungsänderungen hervor. Zu deren Erfassung ist es erforderlich, auf die allgemeinen Tensorbeziehungen zurückzugreifen.

Verformungs- und Spannungstensor haben die Komponenten:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m + \varepsilon_x \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_m + \varepsilon_y \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_m + \varepsilon_z \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \sigma_m + \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_m + \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_m + \sigma_z \end{pmatrix},$$

deren Analyse in Kugeltensor und Deviator (Gestalter) durch

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_m \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{D}_0; \quad \mathfrak{P} = \sigma_m \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{P}_0$$

zum Ausdruck kommt, wenn  $\mathfrak{E}$  den Idemfaktor bedeutet. Der zu  $\mathfrak{D}_0$  antisymmetrische Drehtensor sei durch den Drehwinkel  $\varphi$  gekennzeichnet. Die Existenzfrage großer  $\mathfrak{D}$  interessiert hier nicht, da im folgenden nur die zeitlichen Ableitungen benötigt werden.

Für die zeitliche Ableitung gilt nun in bekannter Weise

$$\dot{\mathfrak{D}} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \mathfrak{s}} \cdot \frac{d\mathfrak{s}}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \bar{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z),$$

worin  $\mathfrak{s}$  die Verschiebung und  $\bar{\omega}$  die Winkelgeschwindigkeit bedeuten. Andererseits aber ist<sup>1)</sup>

$$\dot{\mathfrak{P}} = \frac{d\mathfrak{P}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathfrak{s}} \cdot \frac{d\mathfrak{s}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \varphi} \cdot \bar{\omega} \dots \dots \dots (1),$$

worin  $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \varphi} \cdot \bar{\omega} = \Pi_x \cdot \omega_x + \Pi_y \cdot \omega_y + \Pi_z \cdot \omega_z$  mit den drei Deviatoren

$$\Pi_x = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{zx} & -\tau_{xy} \\ \tau_{xz} & 2\tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_y \\ -\tau_{xy} & \sigma_z - \sigma_y & -2\tau_{yz} \end{pmatrix}; \quad \Pi_y = \begin{pmatrix} -2\tau_{zx} & -\tau_{yz} & \sigma_x - \sigma_z \\ -\tau_{yz} & 0 & \tau_{xy} \\ \sigma_x - \sigma_z & \tau_{xy} & 2\tau_{zx} \end{pmatrix}; \quad \Pi_z = \begin{pmatrix} 2\tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_x - \tau_{yz} \\ \sigma_y - \sigma_x & -2\tau_{xy} & -\tau_{zx} \\ \tau_{yz} & -\tau_{zx} & 0 \end{pmatrix}.$$

\* ) Vorgetragen auf der Tagung der Mathematiker der westlichen Zonen Deutschlands vom 10.—12. April 1947 in Karlsruhe.

<sup>1)</sup> Über die Ableitung siehe: H. Fromm, Ing.-Arch. Bd. IV (1933), S. 452.



Es ist beachtenswert, daß dieses dritte Glied in  $\mathfrak{D}$  nicht vorkommen kann; der Einfluß der Drehung ist hier in  $\bar{\omega}$  abgesondert.

Das Maxwell'sche Stoffgesetz läßt sich nun in besonders anschaulicher Weise als eine Überlagerung einer elastischen Verformung nach Hooke und einer Fließverformung nach Newton unter dem gleichen Spannungszustande  $\mathfrak{P}$  auffassen. Aus

$$\mathfrak{D}_e = \frac{\sigma_m}{3K} \cdot \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{P}_0}{2G} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_f = \frac{\sigma_m}{3\zeta} \cdot \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{P}_0}{2\eta}$$

( $K$  = Kompressionsmodul;  $\zeta$  = Kompressionszähigkeitswert, der meistens stillschweigend unendlich groß angenommen wird) folgt also

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_e + \mathfrak{D}_f = \left( \frac{\sigma_m}{3K} + \frac{\sigma_m}{3\zeta} \right) \cdot \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{P}_0}{2G} + \frac{\mathfrak{P}_0}{2\eta} \dots \dots \dots (2).$$

Es ist ein wesentlicher Bestandteil eines solchen Stoffgesetzes, daß die Ableitungen  $\dot{\mathfrak{D}}$  und  $\dot{\mathfrak{P}}$  auf ein mit dem Stoff bewegtes Koordinatensystem bezogen werden; insbesondere ist also bei  $\mathfrak{P}_0$  nach Gl. (1) auch auf die Drehung  $\bar{\omega}$  zu achten.

Nach Abzug des Kugeltensors  $\dot{\epsilon}_m \cdot \mathfrak{E} = \left( \frac{\dot{\sigma}_m}{3K} + \frac{\dot{\sigma}_m}{3\zeta} \right) \cdot \mathfrak{E}$  und Umordnung erkennt man in Gl. (2) die Maxwell'sche Formulierung

$$\dot{\mathfrak{P}}_0 = 2G \cdot \dot{\mathfrak{D}}_0 - \mathfrak{P}_0/T \quad \text{mit} \quad T = \eta/G,$$

die er aus der Vorstellung entwickelte, daß die Spannung gegenüber einem elastischen Anteile durch Relaxation abnimmt. Die obige Vorstellung einer Überlagerung zweier Verformungsanteile erscheint jedoch physikalisch ursprünglicher und läßt sich auch ohne Schwierigkeit auf weitere Verformungsanteile (z. B. zäh-plastische) anwenden<sup>2)</sup>.

## 2. Stationäre ebene Strömung mit homogener Verformung.

In der stationären Strömung ist  $\partial \mathfrak{P} / \partial t = 0$  und bei Homogenität der Verformung auch  $\partial \mathfrak{D} / \partial \bar{s} = 0$  und  $\partial \mathfrak{P} / \partial \bar{s} = 0$ . Also ist  $\dot{\sigma}_m = 0$ ;  $\sigma_m = \text{konst.}$  und daher bei  $\zeta \rightarrow \infty$  nach Gl. (2)  $\dot{\epsilon}_m = 0$ . Legt man die  $z$ -Achse senkrecht zur Strömungsebene, so ist weiter

$$\begin{aligned} \omega_x = \omega_y = 0; \quad \omega_z = \omega = \text{konst.} \\ \text{und} \quad \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0; \quad \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = \text{konst.}; \quad \dot{\epsilon}_z = 0 \dots \dots \dots (3). \end{aligned}$$

Läßt man noch die  $x, y$ -Achsen im Augenblick die Hauptrichtungen von  $\mathfrak{D}$  halbieren, so wird auch

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_y = 0 \dots \dots \dots (3a)$$

und man erhält aus Gl. (2)

$$\dot{\mathfrak{D}}_0 = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \dot{\gamma} & 0 \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = \frac{\omega}{2G} \cdot \Pi_z + \frac{1}{2\eta} \cdot \mathfrak{P}_0 \dots \dots \dots (4).$$

Dies sind fünf Gleichungen, aus denen sich die sechs Spannungskomponenten des Deviators bestimmen lassen. Man findet für den Spannungszustand

$$\mathfrak{P} = \sigma_m \cdot \mathfrak{E} + \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\eta \dot{\gamma}}{1 + (2T\omega)^2} \quad \text{und} \quad \sigma_y = -\sigma_x = \tau \cdot (2T\omega) \dots \dots \dots (5).$$

$\sigma_m$  bleibt unbestimmt.

Die Schubspannung hängt also außer von  $\dot{\gamma}$  noch von der Drehungsgeschwindigkeit  $\omega$  ab. Außerdem ist bei Drehung der Spannungszustand nicht mehr mit dem der Verzerrungsgeschwindigkeit coaxial, wie das Auftreten der Deviatorspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  lehrt, die in Newtonscher Flüssigkeit mit  $T$  verschwinden.

## 3. Nicht-stationäre ebene Strömung mit homogener Verformung.

Ist  $\partial \mathfrak{P} / \partial t \neq 0$ , so folgt aus Gl. (2) mit den im übrigen gleichen Überlegungen an Stelle von Gl. (4) die erweiterte Gleichung

$$\dot{\mathfrak{D}} = \dot{\epsilon}_m \cdot \mathfrak{E} + \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \dot{\gamma} & 0 \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = \frac{\dot{\sigma}_m}{3K} \cdot \mathfrak{E} + \frac{1}{2G} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial t} + \frac{\omega}{2G} \cdot \Pi_z + \frac{1}{2\eta} \cdot \mathfrak{P}_0 \dots \dots \dots (6).$$

<sup>2)</sup> H. F r o m m, a. a. O. S. 450.



Dies bedeutet sechs unabhängige gewöhnliche Differentialgleichungen, von denen man allgemein zwei Integrale angeben kann. Man findet:

neben  $\sigma_m = 3 K \cdot \varepsilon_m$  (elastische Kompressibilität) für den Spannungsdeviator:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y = -\sigma_z = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_x - \sigma_y) + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{T} + 4\omega \cdot \tau_{xy} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\tau_{xy}) + \frac{\tau_{xy}}{T} - \omega (\sigma_x - \sigma_y) = G \cdot \dot{\gamma} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} + \frac{\tau_{zx}}{T} + \omega \cdot \tau_{yz} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} + \frac{\tau_{yz}}{T} - \omega \cdot \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \quad \dots \quad (7).$$

Läßt man die Strömung kinematisch stationär, also  $\dot{\gamma}$  und  $\omega$  auch zeitlich unveränderlich, so erhält man die nur dynamisch instationäre Strömung, die man als „reine Relaxationsströmung“ bezeichnen könnte. Hierfür sind die Differentialgleichungen linear und weiter integrierbar, und man kann die fünf Integrationskonstanten durch die Komponenten des Spannungsdeviators  $\mathfrak{P}_a$  zur Zeit  $t=0$  ausdrücken. Das Ergebnis lautet:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\tau_\infty (2T\omega) + e^{-\frac{t}{T}} \cdot \left[ \frac{\sigma_{xa} + \sigma_{ya}}{2} + (\tau_\infty - \tau_{xya}) \sin(2\omega t) + \left( \tau_\infty (2T\omega) + \frac{\sigma_{xa} - \sigma_{ya}}{2} \right) \cos(2\omega t) \right] \\ \sigma_y &= +\tau_\infty (2T\omega) + e^{-\frac{t}{T}} \cdot \left[ \frac{\sigma_{xa} + \sigma_{ya}}{2} - (\tau_\infty - \tau_{xya}) \sin(2\omega t) - \left( \tau_\infty (2T\omega) + \frac{\sigma_{xa} - \sigma_{ya}}{2} \right) \cos(2\omega t) \right] \\ \sigma_z &= \sigma_{za} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \\ \tau_{xy} &= \tau_\infty - e^{-\frac{t}{T}} \cdot \left[ (\tau_\infty - \tau_{xya}) \cos(2\omega t) - \left( \tau_\infty (2T\omega) + \frac{\sigma_{xa} - \sigma_{ya}}{2} \right) \sin(2\omega t) \right] \\ \tau_{yz} &= e^{-\frac{t}{T}} \cdot [\tau_{yza} \cdot \cos(\omega t) + \tau_{zxa} \sin(\omega t)] \\ \tau_{zx} &= e^{-\frac{t}{T}} \cdot [\tau_{zxa} \cdot \cos(\omega t) - \tau_{yza} \sin(\omega t)] \end{aligned} \right\} \dots \quad (8),$$

worin  $\tau_\infty = \frac{\eta \dot{\gamma}}{1 + (2T\omega)^2} \dots \dots \dots (8a).$

Bemerkenswert erscheint, daß einer Relaxation nach einer Exponentialfunktion eine solche nach abklingenden Schwingungen überlagert ist, welche die Frequenzen  $2\omega$  bei  $\sigma_x$ ;  $\sigma_y$ ;  $\tau_{xy}$ , dagegen  $\omega$  bei  $\tau_{yz}$ ;  $\tau_{zx}$  und Null bei  $\sigma_z$  haben. Die schwingende Relaxation bleibt auch bei  $\dot{\gamma}=0$  noch erhalten, geht aber bei  $\omega \rightarrow 0$  in die exponentielle über. Ist gleichzeitig  $\dot{\gamma}=0$  und

$\omega = 0$ , so wird einfach  $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_a \cdot e^{-\frac{t}{T}}$ .

Ein Vergleich von Gl. (8) mit Gl. (5) zeigt, daß die stationäre Strömung den Grenzzustand der abgeklungenen Relaxationsströmung darstellt.

Als Sonderfall sei noch der Einlaufvorgang erwähnt, der bei plötzlich einsetzender Bewegung  $\dot{\gamma} = \text{konst.}$  und  $\omega = \text{konst.}$  vom spannungsfreien Anfangszustande in den stationären Endzustand überführt. Mit  $\mathfrak{P}_a = 0$  folgt aus Gl. (8)

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\sigma_x = \tau_\infty \cdot \left\{ (2T\omega) - e^{-\frac{t}{T}} \cdot [\sin(2\omega t) + (2T\omega) \cdot \cos(2\omega t)] \right\}; \\ \tau_{xy} &= \tau_\infty \cdot \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{T}} \cdot [\cos(2\omega t) - (2T\omega) \cdot \sin(2\omega t)] \right\}; \\ \sigma_z &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned}$$

#### 4. Sonderfälle stationärer homogener Strömung.

a) Reine Schiebung: Mit  $\omega=0$  liegt die in Bild 1 dargestellte reine Schiebung ohne Drehung vor. Aus Gl. (5) folgt hierfür

$$\tau = \eta \dot{\gamma}; \quad \sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \dots \dots \dots (9),$$

d.h. die Maxwell'sche Flüssigkeit unterscheidet sich dabei nicht von der Newton'schen, weil die elastischen Zusatzverzerrungen infolge Drehung des Spannungszustandes über den Stoff fehlen.



b) Laminare Strömung: Mit  $\omega = \frac{1}{2} \dot{\gamma}$  liegt die in Bild 2 dargestellte laminare Strömung parallel zur  $y$ -Achse vor. Aus Gl. (5) folgt hierfür:

$$\frac{\tau}{G} = \frac{(T\dot{\gamma})}{1 + (T\dot{\gamma})^2}; \quad \frac{\sigma_y}{G} = -\frac{\sigma_x}{G} = \frac{\tau}{G} \cdot (T \cdot \dot{\gamma}) = \frac{(T\dot{\gamma})^2}{1 + (T\dot{\gamma})^2} \quad (10).$$

Der Verlauf dieser Funktionen<sup>3)</sup> ist in Bild 3 dargestellt.

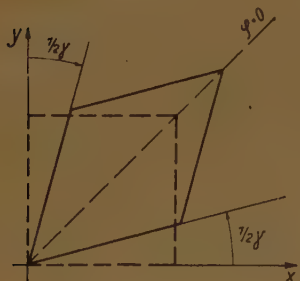
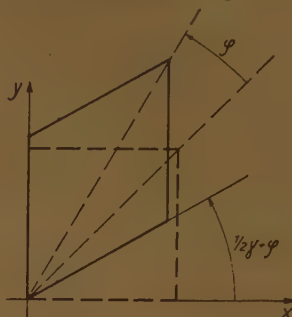
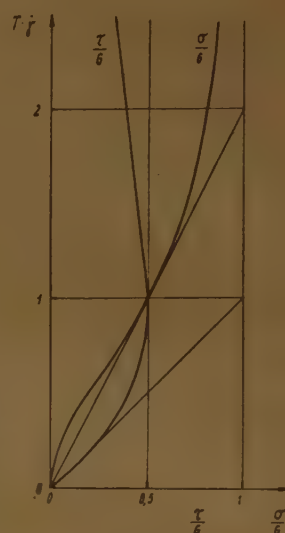
Bild 1.  $\varphi = 0$ .Bild 2.  $\varphi = \frac{1}{2} \gamma$ .

Bild 3.

Abweichend vom Newtonschen Verhalten sind hier bei einer laminaren Strömung der hydrostatischen Spannung  $\sigma_m$  eine Zugspannung ( $\sigma_y$ ) in Richtung der Strömung und eine Druckspannung ( $-\sigma_x$ ) senkrecht zur Strömung überlagert, die schwächer als quadratisch mit  $\dot{\gamma}$  wachsen und dem Schubmodul als Grenzwert zustreben. Die Schubspannung  $\tau$  aber erreicht bei  $\dot{\gamma}_H = \frac{1}{T} = G/\eta$  ein Maximum  $\tau_H = G/2$

und nimmt mit weiter wachsendem  $\dot{\gamma}$  asymptotisch wieder auf Null ab. Die Zustände im Gebiete  $T\dot{\gamma} > 1$  dürften als labil zu bezeichnen sein, so daß man von einer „Turbulenz zweiter Art“ sprechen kann.

### 5. Der Schubmodul zäher Flüssigkeiten<sup>4)</sup>.

Aus der bekannten Beziehung

$$E = 2(1 + \mu) \cdot G = 3(1 - 2\mu) \cdot K \quad (11).$$

( $E$  = Elastizitätsmodul,  $\mu$  = Poissonsche Zahl) hat Houwink<sup>5)</sup> geschlossen, daß wegen  $\mu = 0,5$  in Flüssigkeiten  $E = G = 0$  sein müsse. Dieser Schluß enthält zwei Denkfehler: Erstens muß man von der elastischen Konstante  $\mu$  eine analoge Konstante  $\nu$  für das zähe Fließen unterscheiden, die mit  $\eta$  und  $\zeta$  in gleicher Weise verknüpft ist durch

$$2(1 + \nu) \cdot \eta = 3(1 - 2\nu) \cdot \zeta \quad (11a).$$

Die übliche Annahme  $\zeta \rightarrow \infty$  ist also identisch mit  $\nu \rightarrow 0,5$ , wodurch über  $\eta = 0 \cdot \infty$  nichts ausgesagt ist. Ebenso gibt es keinen Schluß von  $\nu$  auf  $\mu$ . — Zweitens aber würde  $\mu \rightarrow 0,5$  auch elastische Inkompressibilität bedeuten, also  $K \rightarrow \infty$ . Nach Gl. (11) würden dann also auch  $E$  und  $G$  in die unbestimmte Form  $0 \cdot \infty$  ausarten, so daß auf diesem Wege keine Aussage über den Schubmodul möglich wird. Da jedoch im Gegenteil die Endlichkeit von  $K$  erwiesen ist, wie jede einschlägige Tabelle zeigt, so wird umgekehrt eine Messung von  $G$  dazu verhelfen, aus Gl. (11) auch  $\mu$  zu bestimmen, für welches bisher bei Flüssigkeiten kein Anhalt vorliegt.

Statt des Houwinkschen Schlusses  $G \rightarrow 0$  liegt die Annahme  $G \rightarrow \infty$  viel näher, mit der nach Gl. (2) die Maxwell'sche Flüssigkeit in die Newton'sche ausartet.

Diese Erwägungen veranlaßten mich, die Messung des Schubmoduls an Flüssigkeiten zu betreiben. Sie erfolgte<sup>6)</sup> in einem Gerät, das aus zwei coaxialen Kreiszylindern bestand, die in

<sup>3)</sup> Dies ist ein Sonderfall des schon früher behandelten allgemeineren Problems des zäh-plastischen laminaren Strömens. Vgl. H. Fromm, a. a. O. S. 454. Dort befindet sich gerade in der der Gl. (10) entsprechenden Formel ein Versehen, indem dort der Wurzelausdruck bei  $\frac{1}{2} \dot{\gamma}$  im Nenner, bei  $\tau$  im Zähler stehen muß. — Ferner muß es dort auf S. 436 in der letzten Textzeile heißen: deviator-artgleich  $\equiv$  coaxial + ähnlich.

<sup>4)</sup> Diese Ausführungen habe ich unter dem Titel „Schubelastizität zäher Flüssigkeiten“ auf der Tagung der GaMM in München (1942) vorgetragen. Ihre Veröffentlichung in der „Forschung“ (1944/45) wurde im Druck durch Kriegseinfluß vernichtet.

<sup>5)</sup> R. Houwink, Monographie über „Struktur und Materie?“ (Einleitung).

<sup>6)</sup> W. Hartung, „Die Messung des Schubmoduls zäher Flüssigkeiten“. Diss. T. H. Danzig 1942. Vorgetragen auf der Tagung der GaMM in München 1942. Veröffentlichung in der „Forschung“ (1944/45) im Druck durch Kriegseinfluß vernichtet.



einem Ringspalt zwischen sich die zu messende Flüssigkeit enthielten. Der eine Zylinder wurde in Drehschwingungen um die Achse versetzt, die sich durch die Elastizität und die Zähigkeit der Flüssigkeit auf den anderen frei drehbaren Zylinder übertrugen.

Für diesen Vorgang muß man auf die allgemeinen Gl. (7) mit  $\dot{\gamma} = 2\omega$  zurückgreifen, die bei Durchführung der Versuche noch nicht entwickelt waren. Vielmehr wurde der Führung und Auswertung der Versuche der vereinfachte Maxwell'sche Ansatz

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta} + \frac{\dot{\tau}}{G} \dots \dots \dots (11b)$$

zugrunde gelegt, aus dem sich die einfache Beziehung ergibt, daß sich der Schubmodul  $G$  aus derjenigen Frequenz, bei der gerade eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  zwischen den beiden Zylindern auftritt, bestimmen läßt, ohne daß der Zähigkeitswert  $\eta$  bekannt zu sein braucht. Der Fehler, der durch Ersatz von Gl. (7) durch Gl. (11b) hereingebracht wird, dürfte nicht unbedeutend sein, worauf u. a. einige damals nicht aufgeklärte Unstimmigkeiten hinweisen. Auch ergaben sich überraschend kleine Werte als „Schubmoduln“ der untersuchten Glycerin-Wasser-Gemische und Phthalate. Trotzdem seien die ermittelten Werte der Schubmoduln  $G$  in Abhängigkeit von dem Zähigkeitswert  $\eta$  bei Veränderung der Temperatur und der Konzen-

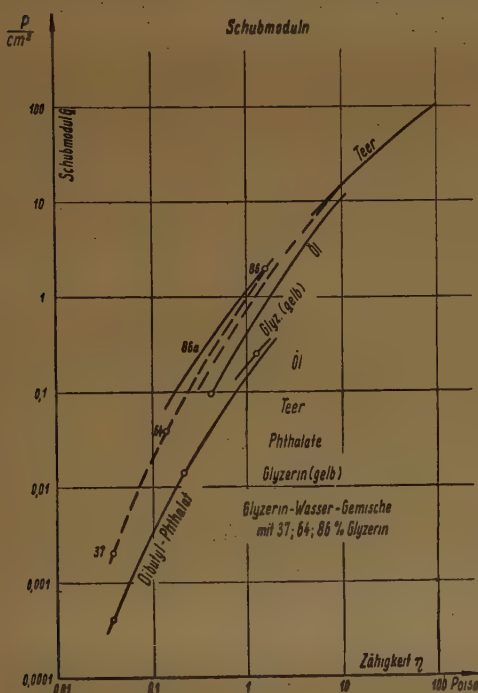


Bild 4a (doppelt logarithm. Darstellung).

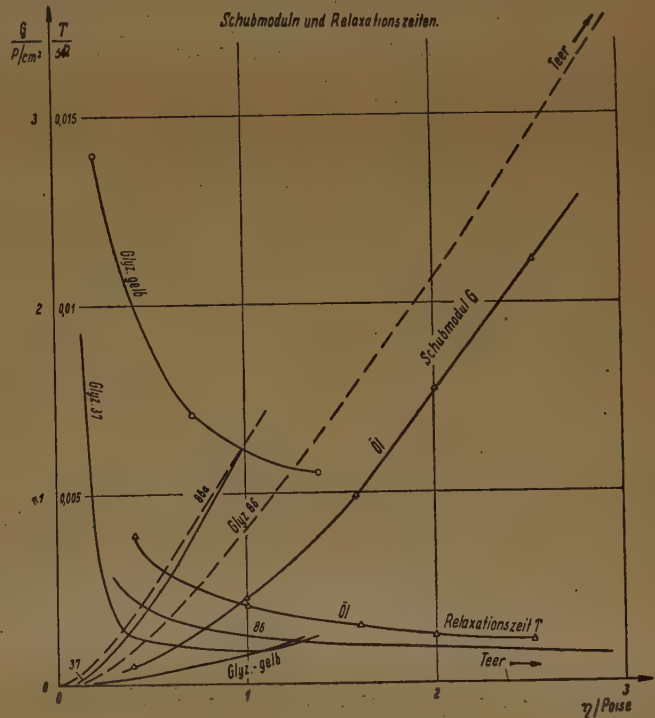


Bild 4b (lineare Darstellung).

tration mit allem notwendigen Vorbehalt mitgeteilt, da leider Versuchsprotokolle und Apparaturskizzen nicht mehr bestehen und daher eine neue Auswertung nicht mehr möglich ist. Bild 4a gibt diese in doppelt-logarithmischer Darstellung über den ganzen untersuchten Bereich, Bild 4b einen Auszug daraus und die daraus ermittelten Relaxationszeiten  $T = \eta/G$  in linearer Darstellung. Die Kräfteinheit ist mit  $p(\text{pond}) = 981 \text{ dyn}$  bezeichnet.

Als Zahlenbeispiel für die Anwendung der Gl. (10) sei ein Öl von  $\eta = 1 \text{ Poise}$ ;  $G = 0,47 \text{ p/cm}^2$ ;  $T = 0,0022 \text{ sec}$  gewählt. Für dieses wird  $\tau_H = 0,235 \text{ p/cm}^2 = 230 \text{ dyn/cm}^2$  und tritt bei  $\dot{\gamma}_H = 454 \text{ sec}^{-1}$  auf. Ist die Schichtdicke der Flüssigkeit  $\delta = 1 \text{ mm}$ , so muß also die kritische Relativgeschwindigkeit der Wände  $\Delta v = \dot{\gamma}_H \cdot \delta = 45,4 \text{ cm/sec}$  sein, bei deren Überschreiten Labilität zu erwarten ist.

## 6. Stationäre Parallel-Strömung zwischen festen ebenen parallelen Platten und im Rohr mit Kreisquerschnitt.

a) Berechnung: Die stationäre Strömung erfordert hier ein Druckgefälle in Strömungsrichtung. Eine mit der Änderung von  $\sigma_m$  verbundene Volumendilatation ( $3\varepsilon_m$ ) ergibt also Beschleunigungen. Um die Rechnung durch Beachtung der Trägheitskräfte und möglicher Querbewegungen nicht unübersichtlich zu machen, sei im folgenden Inkompressibilität vorausgesetzt ( $K \rightarrow \infty$ ). Dann ist überall  $\varepsilon_m = 0$  und die Laminarströmung durchweg parallel.



Das Koordinatensystem liege mit der  $y$ -Achse in Strömungsrichtung mitten zwischen den parallelen Platten bzw. in der Rohrachse. Die  $x$ -Achse verlaufe senkrecht zu den Platten bzw. beim Rohre als radiale Zylinderkoordinate. Dann ist die Geschwindigkeit  $v=v_y$  nur von  $x$  abhängig und die Beziehungen [Gl. (3, 3a)] bleiben bestehen mit der Abänderung, daß

$$2\omega(x) = \dot{\gamma}(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} \quad \dots \quad (12)$$

auch von  $x$  abhängen.

Die Strömung verformt also nicht mehr homogen, in Gl. (1) ist daher  $\partial \mathfrak{P}/\partial \dot{s} \neq 0$ , auch  $\partial \mathfrak{P}_0/\partial \dot{s} \neq 0$ , aber  $\partial \mathfrak{P}_0/\partial y = 0$ . Und weil  $\frac{d\dot{s}}{dt} = v$  keine Komponenten nach  $x$  und  $z$  hat, so gilt nach hier

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial \dot{s}} \cdot \frac{\partial \dot{s}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial z} \cdot v_z = 0.$$

Bei stationärer Strömung  $\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} = 0\right)$  gilt also wie bei der ebenen homogen-verformten Strömung die Gl. (4), also auch Gl. (5) mit den Lösungen Gl. (9) für die Newtonsche und Gl. (10) für die Maxwell'sche Flüssigkeit.

Die Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement liefern nun:

für die Platten	für das Rohr
$\frac{\partial(\sigma_m + \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial[x \cdot (\sigma_m + \sigma_x)]}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} - (\sigma_m + \sigma_x) = 0 \quad \dots \quad (13),$
$\frac{\partial(\sigma_m + \sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$	$x \cdot \frac{\partial(\sigma_m + \sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(x \cdot \tau)}{\partial x} = 0 \quad \dots \quad (14).$

Wegen Gl. (12) ist aber  $\partial \dot{\gamma}/\partial y = 0$ , also nach Gl. (9) bzw. (10) auch

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \sigma_z = 0 \quad \dots \quad (15).$$

So folgt aus Gl. (13) und (14):

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad \left| \quad \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\sigma_x}{x} = 0 \quad \dots \quad (16), \right.$$

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad \left| \quad \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\tau}{x} = 0 \quad \dots \quad (17). \right.$$

Ableitung von Gl. (16) und (17) nach  $y$  liefert wegen Gl. (15)  $\frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial y^2} = 0$ .  $\frac{\partial \sigma_m}{\partial y}$  ist also sowohl über den Querschnitt als auch längs der Strömung konstant und es herrscht wegen Gl. (15) ein im ganzen Strömungsfelde gleiches Druckgefälle:

$$-p' = -\frac{\partial p_y}{\partial y} = +\frac{\partial(\sigma_m + \sigma_y)}{\partial y} = +\frac{\partial \sigma_m}{\partial y} = \text{konst.} \quad \dots \quad (18).$$

Damit ergeben sich aus Gl. (17) gewöhnliche Differentialgleichungen für  $\tau(x)$  mit den Lösungen:

$$\tau = p' \cdot x + A_p \quad \left| \quad \tau = \frac{p'}{2} \cdot x + \frac{A_R}{x} \right.$$

Die Integrationskonstante  $A_p$  ist wegen Symetrie,  $A_R$  wegen der Stetigkeit an der Rohrachse bzw. an der Grenzfläche zwischen Kernströmung und Randströmung (vgl. Absatz c) als verschwindend anzunehmen. So ist allgemein

$$\left. \begin{aligned} \tau &= -\frac{f}{2} \cdot x \\ \text{mit } f_{\text{Platten}} &= -2p' = -2\frac{\partial p_y}{\partial y} \quad \left| \quad \text{bzw. } f_{\text{Rohr}} = -p' = -\frac{\partial p_y}{\partial y} \right. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (19),$$

übereinstimmend in Maxwell'scher wie in Newton'scher Flüssigkeit.

Da nach Gl. (9) bzw. (10)  $\sigma_y = -\sigma_x = \tau \cdot (T\dot{\gamma}) = -\frac{f}{2} \cdot x \cdot (T\dot{\gamma})$  ist, so folgt nun aus Gl. (16) mit Gl. (19)

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial x} = -\frac{f}{2} \cdot (T\dot{\gamma}) - \frac{f}{2} \cdot x \cdot \frac{d(T\dot{\gamma})}{dx} \quad \left| \quad \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} = -f \cdot (T\dot{\gamma}) - \frac{f}{2} \cdot x \cdot \frac{d(T\dot{\gamma})}{dx} \quad \dots \quad (20). \right.$$

Bei Newton'scher Flüssigkeit ist wegen  $T=0$ ;  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  der Druck  $p_x = p_y = -\sigma_m$  gleichmäßig über den Querschnitt verteilt, bei Maxwell'scher Flüssigkeit dagegen sind  $p_x = -(\sigma_m + \sigma_x)$ ;  $p_y = -(\sigma_m + \sigma_y)$ ;  $p_z = -\sigma_m$  ungleichmäßig verteilt.



Unter Benutzung von Gl. (9) bzw. (10) können nun nach Gl. (20) die Druckverteilung, nach Gl. (12) die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt und schließlich der Gesamtstrom leicht berechnet werden. Bedeutet  $2a$  den Abstand der Platten voneinander bzw. den Rohrdurchmesser, so folgt aus Gl. (12) wegen des Haftens an der Wand

$$v(x) = \int_a^x \dot{\gamma} dx = - \int_x^a \dot{\gamma} dx \quad \dots \quad (21).$$

Bezeichnet ferner  $F(x)$  die Strömungsfläche

$$F(x) = 2bx \quad | \quad F(x) = \pi x^2$$

und  $F(a)$  den Strömungsquerschnitt, so wird die Stromstärke  $Q$  bzw. die mittlere Geschwindigkeit  $v_m$

$$Q = F(a) \cdot v_m = \int_0^a v dF = vF \Big|_0^a - \int_0^a F dv = 0 - \int_0^a F(x) \cdot \dot{\gamma}(x) dx \quad \dots \quad (22).$$

b) Ergebnisse: Für die Newtonsche Flüssigkeit folgen mit Gl. (9) die bekannten Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \text{konst.} - p' \cdot y; & v(x) &= \frac{a^2 f}{4\eta} \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]; \\ v_{m\text{Platten}} &= \frac{a^2 f}{6\eta} & v_{m\text{Rohr}} &= \frac{a^2 f}{8\eta} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (23).$$

Für Maxwell'sche Flüssigkeit seien zur Abkürzung als dimensionslose Kenngrößen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} \text{für Koordinate bzw. Schubspannung.} & \dots \dots \dots \xi = \frac{f \cdot x}{G} = - \frac{2\tau}{G} = - \vartheta, \\ \text{„ Druckgefälle bzw. Randspannung oder Wandabstand} & \dots \dots \dots \alpha = \frac{f \cdot a}{G} = \frac{2\tau_{\text{Rand}}}{G}, \\ \text{„ Geschwindigkeit} & \dots \dots \dots w = \frac{T}{G} \cdot f \cdot v(x), \\ \text{„ Strom bzw. mittlere Geschwindigkeit bzw. mittlere Schie-} & \dots \dots \dots q = \frac{Q}{F(a)} \cdot \frac{T}{a} = v_m \cdot \frac{T}{a} \\ \text{bungsgeschwindigkeit} & \dots \dots \dots \\ \text{„ Druckkomponenten: } P_m = P_z = \frac{2}{G} \cdot p_z = - \frac{2}{G} \cdot \sigma_m; & P_x = \frac{2}{G} p_x = - \frac{2}{G} (\sigma_m + \sigma_x); \\ & P_y = \frac{2}{G} p_y = - \frac{2}{G} (\sigma_m + \sigma_y). \end{aligned} \right\} \quad (24).$$

Damit folgt als Umkehrung von Gl. (10):

$$(T\dot{\gamma}) = \frac{1 \mp \sqrt{1 - \xi^2}}{-\xi} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - \vartheta^2}}{\vartheta} \quad \dots \quad (25),$$

worin das obere Vorzeichen für die langsame (stabile) Strömung, das untere für die rasche (labile) gilt, und

$$\frac{2}{G} \sigma_y = - \frac{2}{G} \sigma_x = \frac{2\tau}{G} \cdot (T \cdot \dot{\gamma}) = 1 \mp \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Mit der Hilfsfunktion

$$\varphi(\xi) = - \ln \xi \pm [\ln \xi - \ln(1 + \sqrt{1 - \xi^2}) + \sqrt{1 - \xi^2}] \quad \dots \quad (26)$$

stellt sich das Ergebnis der Integrationen folgendermaßen dar:

$$\text{Geschwindigkeitsverteilung:} \quad w(\xi, \alpha) = \varphi(\xi) - \varphi(\alpha) \quad \dots \quad (27),$$

Stromstärke:

$$q(\alpha)_{\text{Platten}} = \frac{2\alpha \mp [\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} + \arcsin \alpha]}{2\alpha^2} \quad \left| \quad q(\alpha)_{\text{Rohr}} = \frac{\alpha^2 \mp \frac{2}{3} [1 - \sqrt{1 - \alpha^2}]}{2\alpha^3} \right. \quad (28).$$

Druckkomponenten:

$$\left. \begin{aligned} P_M = P_z = C_P - \alpha \frac{y}{a} \pm \sqrt{1 - \xi^2} \\ P_x = (C_P + 1) - \alpha \frac{y}{a} \\ P_y = (C_P - 1) - \alpha \frac{y}{a} \pm 2 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} P_M = P_z = C_R - 2\alpha \frac{y}{a} + \varphi(\xi) \pm \sqrt{1 - \xi^2} \\ P_x = (C_R + 1) - 2\alpha \frac{y}{a} + \varphi(\xi) \\ P_y = (C_R - 1) - 2\alpha \frac{y}{a} + \varphi(\xi) \pm 2 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned} \right\} \quad (29).$$



c) Erörterung der Ergebnisse: Zur Veranschaulichung der Geschwindigkeitsverteilung ist in Bild 5 die Funktion  $\varphi(\xi)$  aufgetragen. Der Ast  $ABC$  gilt für die stabile, der Ast  $CF$  für die labile Strömung. Man denke sich die  $\varphi$ -Achse mit der  $y$ -Achse zusammenfallend in die Strömungsrichtung weisend, also  $\xi$  in  $x$ -Richtung.  $\xi$  wird nach Gl. (24) durch  $\alpha$  als Wandabstand begrenzt ( $0 \leq \xi \leq \alpha$ ). Nach Gl. (27) gibt z. B. für  $\alpha = 0,5$  die Kurve  $AB$  über der Grundlinie  $GB$  die Geschwindigkeitsverteilung  $w(\xi)$  für die stabile Strömungsform an, dagegen die Kurve  $EF$  über der Grundlinie  $HE$  diejenige für die labile Strömungsform; bei dieser müßte in der  $y$ -Achse die Geschwindigkeit unendlich groß sein.

Mit wachsendem Druckgefälle ( $\alpha \rightarrow 1$ ) senken sich beide Grundlinien bis zur gemeinsamen Grenzlage  $OC$ , die nach Bild 3 ( $\alpha \leq 1$ ) nicht überschritten werden kann. Entsprechend ändern

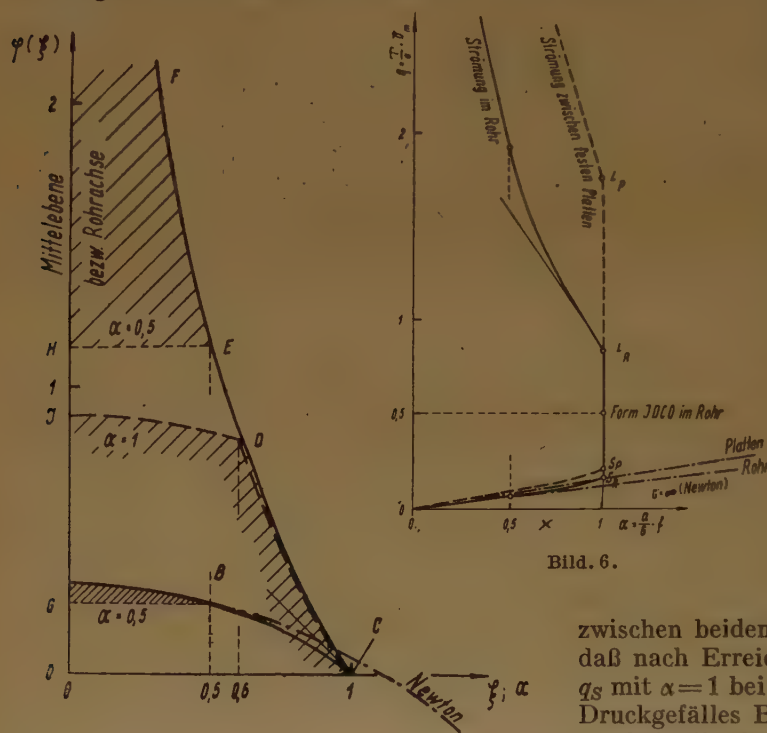


Bild 5.

$$\xi = \frac{f}{G} \cdot x; \quad \alpha = \frac{f}{G} \cdot a; \quad w(\xi; \alpha) = \varphi(\xi) - \varphi(\alpha).$$

Für Rohrströmung ist:  
bei  $\alpha = 0,5$ : Form  $ABG$ :  $q = 0,068$ , Form  $\infty FEH$ :  $q = 1,94$ ,  
bei  $\alpha = 1,0$ : Form  $ACO$ :  $q = 0,167$ , Form  $JDCO$ :  $q = 0,5$ ,  
Form  $\infty FCO$ :  $q = 0,834$ .

$$q = \frac{T}{a} \cdot v_m$$

veranschaulicht. So läßt sich durch allmähliche Verkleinerung von  $\xi_0$  von 1 bis 0 jede Stromstärke zwischen  $q_S$  und  $q_L$  stationär aufrecht erhalten, womit die Lücke  $SL$  in Abb. 6 durch eine Gerade geschlossen ist.

In Bild 3 stellen sich diese Strömungsformen folgendermaßen dar: Da  $\tau$  nach Gl. (24) mit  $x$  von 0 bis  $\tau_{Rand}$  wächst, so verteilt sich  $(T \cdot \gamma)$  entsprechend nach dem stabilen Ast steigend oder nach dem labilen Ast fallend, solange  $\tau_R < G/2$  ist. Die bei  $\tau_R = G/2$  mögliche geschichtete Strömung zeigt im Kern das stabile Ansteigen bis zum Grenzwerte  $\tau_0 = -\frac{G}{2} \cdot \xi_0$ , bei dem ein Sprung auf den labilen Ast erfolgt, längs dem  $(T \cdot \gamma)$  nun abnimmt bis auf 1 bei  $\tau_R = G/2$ .

Zum Vergleich mit der Strömung Newtonscher Flüssigkeiten ( $G = \infty$ ) ist das Ergebnis Gl. (23) in Bild 5 und 6 mit eingetragen; dabei ist  $G$  in den Abkürzungen Gl. (24) lediglich als Maßstabsfaktor ohne physikalische Bedeutung anzusehen. Die Strömung ist stets stabil und unterliegt nicht der Beschränkung  $\alpha \leq 1$ .

Die Bilder 7a, b geben die Druckkomponenten nach Gl. (29) wieder und zwar zunächst für die völlig stabile bzw. völlig labile Strömung. Man erkennt, daß alle Komponenten in der Mitte der stabilen Strömung einen gemeinsamen Höchstwert haben. In der labilen Strömung zwischen

sich die Geschwindigkeiten; dabei ist zu beachten, daß der Maßstab für  $x$  und  $\alpha$  sich nach Gl. (24) proportional  $f$  ändert, so daß bei labiler Strömung wenigstens am Rande die Geschwindigkeiten abnehmen, wenn  $\alpha$  mit  $f$  wächst. Daher nimmt bei wachsendem Druckgefälle  $\alpha$  auch die Stromstärke  $q$  bei labiler Strömungsform von  $\infty$  auf einen Grenzwert  $q_L$  ab, während sie bei stabiler Strömungsform von Null bis  $q_S$  zunimmt, wie es in Bild 6 (Punkte  $L$  und  $S$ ) gemäß Gl. (28) dargestellt ist.

Der Sprung zwischen  $q_S$  und  $q_L$  entspricht dem Unterschiede der Zweige  $AC$  und  $FC$  in Bild 5. Den Übergang

zwischen beiden kann man sich so vorstellen, daß nach Erreichen des stabilen Grenzwertes  $q_S$  mit  $\alpha = 1$  bei einer weiteren Steigerung des Druckgefälles Beschleunigungen erfolgen, die nur beim Rückgang auf  $\alpha = 1$  wieder zu einer stationären Strömungsform führen können. Dabei kann am Rande die Geschwindigkeitsverteilung der labilen Strömung auftreten während eine Kernströmung mit stabilem Geschwindigkeitsprofil eine gleichmäßige Geschwindigkeitssteigerung erfährt, wie es in Bild 5 etwa der Kurvenzug  $CDJ$  über der Grenzkurve  $OC$  für eine Schichtgrenze  $\xi_0 = 0,6$

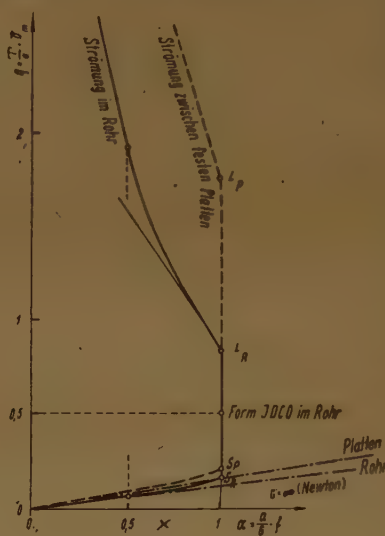


Bild 6.



Platten nehmen die Drucke dagegen zur Wand hin zu, im Rohre besitzen sie bei hinreichendem Druckgefälle ( $\alpha > 0,75$  bzw.  $> 0,85$ ) ein Minimum in Wandnähe mit Unendlichkeit in der Mitte. Bei geschichteter Strömung treten an der Grenzstelle  $\xi_g$  Drucksprünge auf; nur  $P_x$  muß wegen des Wechselwirkungsprinzips stetig bleiben. Dies ist bei der Plattenströmung wegen  $P_x(\xi) = \text{konst}$  ohne weiteres der Fall, so daß die Integrationskonstante  $C_P$  unverändert bleibt.  $P_y$  und  $P_M$  springen also bei  $\xi_g$  um die Differenz zwischen ihrem stabilen und ihrem labilen Aste auf diesen über. Bei der Rohrströmung dagegen muß  $C_R$  bei  $\xi_g$  um  $P_{xL} - P_{xS}$  vermindert werden, damit  $P_x$  stetig bleibt. Um den gleichen Betrag sind also die labilen Äste zwischen  $\xi_g$  und 1 nach unten zu rücken, damit Druckverteilung und Sprünge richtig zur Darstellung kommen.

## 7. Druck- und Staudruck-Messungen.

Die übliche Ausbildung des Pitot-Rohres mit einem Ringschlitz hat den Vorteil, daß es bei Stellung gegen die Strömung den durch den Schlitz aufgenommenen Querdruck mittelt und dadurch diese Messung beruhigt. Man schaltet damit andererseits eine Kontrolle über die Gleichmäßigkeit der Strömung bzw. die Richtung der Meßrohrstellung aus. Besonders aber wird das Rohr in Maxwellschen Flüssigkeiten an den Stellen nicht verschwindender Schubspannung unbrauchbar, weil sich hier auch die statischen Druckkomponenten voneinander unterscheiden.

Es sei hier die Anwendung eines Kreuzloch-Meßrohres vorgeschlagen. Neben der der Strömung entgegengestehenden Staudrucköffnung sei an Stelle des Ringschlitzes ein Kreuz von vier Öffnungen angebracht, von denen je zwei gegenüberliegende miteinander kommunizieren und so noch eine Mittelung gestatten. Man hat also Öffnungen für drei zueinander senkrechte Druckrichtungen. Die Stauöffnung dreht man gegen die Strömung ( $y$ -Achse), das Rohr muß weiter um seine Achse drehbar sein, so daß die Kreuzöffnungen eine größte Druckdifferenz aufweisen ( $x$ - und  $z$ -Achse).

Bei den im vorigen Abschnitte behandelten ebenen und quasi-ebenen Strömungen, für welche Gl. (10) gilt, sind also die meßbaren Druckwirkungen [vgl. Gl. (24);  $\rho$ =Dichte]:

$$\begin{aligned} k_y &= p_y + \frac{\rho}{2} \cdot v^2 = p_m - \sigma_y + \frac{\rho}{2} v^2, \\ k_x &= p_x = p_m - \sigma_x, \\ k_z &= p_z = p_m. \end{aligned}$$

Nach Gl. (10) ist nun  $\sigma_y = -\sigma_x$  stets positiv, also  $k_x > k_z$ . Dies bietet die erste Meßkontrolle. Aus den drei Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} p_z &= p_m = -\sigma_m = k_z, \\ \sigma_y &= -\sigma_x = (k_x - k_z), \\ \frac{\rho}{2} v^2 &= (k_y - k_z) + (k_x - k_z). \end{aligned}$$

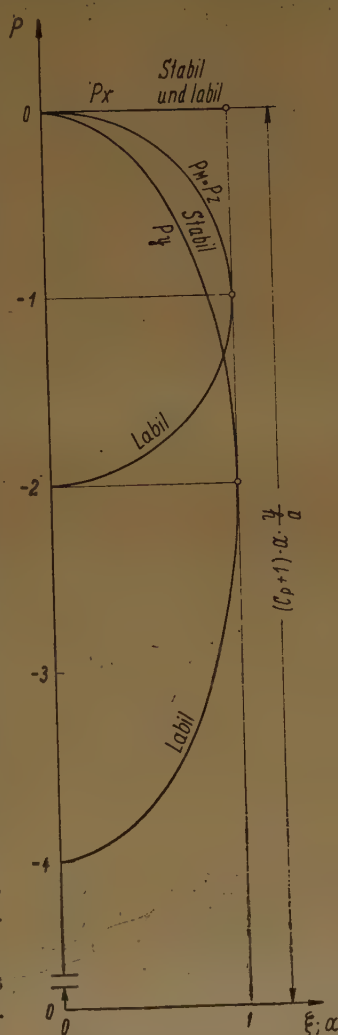


Bild 7a (Plattenströmung).

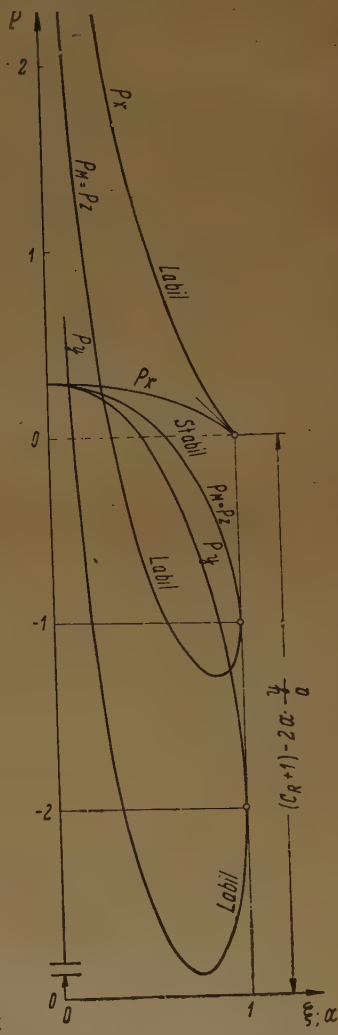


Bild 7b (Rohrströmung).



Die Geschwindigkeit ergibt sich also aus der Summe zweier Differenzmessungen, deren erste gleichsam den Newtonschen Anteil liefert, während die zweite als Maxwell'sche Korrektur zugleich die Deviatorspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  bestimmt. Dazu muß, wie auch sonst, eine Absolutmessung zur Bestimmung der Mittelspannung  $\sigma_m$  erfolgen.

### 8. Beziehungen zur Strukturviskosität.

Makromolekulare kolloidale Lösungen zeigen die als „Strukturviskosität“ bekannte Erscheinung, daß sie mit wachsender Schiebengeschwindigkeit von einem anfangs Newtonschen Verhalten mit der Kenngröße  $\eta_0$  allmählich zu einem solchen mit der Größe  $\eta_\infty$  ( $< \eta_0$ ) hinüberwechseln. Der sich meistens über mehrere Zehnerpotenzen erstreckende Übergang kann nur bei doppelt-logarithmischer Darstellung im ganzen veranschaulicht werden<sup>7)</sup>. Eine schematische Wiedergabe in direkter Darstellung nach Bild 8 gestattet jedoch einen unmittelbaren Vergleich mit der Bild 6 für die Rohrströmung.

Man bemerke zunächst, daß in beiden Fällen die Strömung wie eine Newtonsche (mit  $G = \infty$  bzw.  $\eta = \eta_0$ ) beginnt und sich asymptotisch einer solchen mit  $\eta_\infty$  nähert, wobei in Abb. 6 (wie in Bild 3) im besonderen  $\eta_\infty = 0$  geworden ist, während es in den strukturviskosen Lösungen die Zähigkeit des Lösungsmittels bedeutet. Vielleicht darf der Grund für diese Verwandtschaft darin gesehen werden, daß die Schubelastizität der Maxwell'schen Flüssigkeit in einer Gestaltelastizität der kolloiden Makromoleküle eine Parallele findet.



Bild 8.

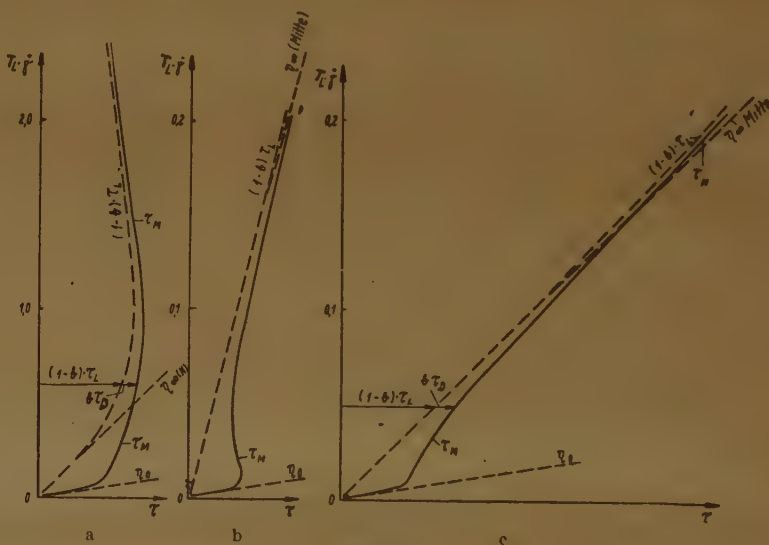


Bild 9.

Dies legt die Vermutung nahe, daß ein strukturviskoses Verhalten nach Bild 8 auch entstehen kann durch eine Mischung von zwei Maxwell'schen Flüssigkeiten mit verschiedenen Relaxationszeiten, die eine Emulsion bilden. Denn nach Gl. (5) wird der eine Teil mit sehr

großer Relaxationszeit schon bei solchen Werten  $\omega$  seiner asymptotischen Grenze nahe sein, bei denen der andere Teil mit sehr kleiner Relaxationszeit noch in seinem fast geradlinigen Anstieg verläuft und durch diesen infolge der Überlagerung der Spannungen den Wert „ $\eta_\infty$ “ bestimmt. Daraus wäre dann weiter zu folgern, daß die bisherigen Strukturviskositätsmessungen erst einen ersten Bereich von Geschwindigkeiten erfaßt haben, wenn der zweite Flüssigkeitsteil auch eine Maxwell'sche Flüssigkeit ist. Denn bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit müßte nun auch der zweite Teil seinen asymptotischen Übergang zur Ordinate  $q$  vollziehen. Im ganzen wäre also aus Bild 3 ein Verlauf nach Bild 9 zu erwarten. Man beachte, daß die Labilität des ersten Teiles durch die Stabilität des zweiten Teiles zu einem stabilen Gemenge ausgeglichen werden kann (Bild 9c).

Die exakte Durchrechnung begegnet erheblichen Schwierigkeiten. Denn denkt man sich die Mischung bestehend aus Tröpfchen eines Dispersoids (Index  $D$ ), die in einem Lösungsmittel (Index  $L$ ) schwimmen, und will meßbare Mittelwerte für die Mischung (Index  $M$ ) berechnen,

<sup>7)</sup> Z. B. W. Philippoff, Kolloid-Z. Bd. 75 (1936), S. 155; Bd. 88 (1939), S. 215.



so muß man an den Oberflächen der Tröpfchen die Randbedingungen der Kontinuität und der Wechselwirkung beachten. Dazu erfolgt in beiden Teilen die Strömung keineswegs eben oder gar homogen, so daß die Gl. (5) sicher nicht exakt gelten.

Man kann eine Näherung durch folgende Annahme versuchen:

1. In jedem Flüssigkeitsteil herrsche für sich im Mittel homogene ebene Strömung, so daß nach Gl. (5) anzusetzen ist:

$$\left. \begin{aligned} \tau_L &= \frac{\eta_L \dot{\gamma}_L}{1 + (2 T_L \omega_L)^2}; & \tau_D &= \frac{\eta_D \dot{\gamma}_D}{1 + (2 T_D \omega_D)^2} \\ \sigma_L &= \tau_L \cdot (2 T_L \omega_L); & \sigma_D &= \tau_D \cdot (2 T_D \omega_D) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

2. Als Ausgleich für die Kontinuität am Rande sei eine kinematische Mittelung für die Drehungen der  $x$ - und  $y$ -Richtungen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}_D + \omega_D\right) \cdot a + \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}_L + \omega_L\right) \cdot (1-a) &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}_M + \omega_M \\ \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}_D - \omega_D\right) \cdot a + \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}_L - \omega_L\right) \cdot (1-a) &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}_M - \omega_M, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \dot{\gamma}_D + (1-a) \cdot \dot{\gamma}_L &= \dot{\gamma}_M \\ a \cdot \omega_D + (1-a) \cdot \omega_L &= \omega_M \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32).$$

3. Als Ausgleich für die Wechselwirkung am Rande diene eine dynamische Mittelung

$$\left. \begin{aligned} b \cdot \mathfrak{P}_D + (1-b) \mathfrak{P}_L &= \mathfrak{P}_M, \\ b \cdot \tau_D + (1-b) \cdot \tau_L &= \tau_M \\ b \cdot \sigma_D + (1-b) \cdot \sigma_L &= \sigma_M \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33).$$

Die Konstanten  $a$  und  $b$  in Gl. (32) und (33) [ebenso  $c$  in Gl. (34)] hängen von Größe und Zahl der Tröpfchen ab und bringen ihren Anteil an linearer, flächenhafter bzw. räumlicher Ausdehnung in Ansatz.

Um die Lösung eindeutig zu machen, fehlen noch zwei Gleichungen. Verschiedenartige Erwägungen führen hier auf unterschiedliche Wege.

4a) Als erste Erwägung sei ein Minimalprinzip der Leistung angenommen. Die Leistung in der Volumeneinheit

$$L_M = c \cdot L_D + (1-c) \cdot L_L = c \cdot \tau_D \cdot \dot{\gamma}_D + (1-c) \cdot \tau_L \dot{\gamma}_L \dots \dots \dots (34)$$

ist bei festem  $\dot{\gamma}_M$  und  $\omega_M$  vermittle Gl. (31), (32), (33) nur eine Funktion von  $\dot{\gamma}_L$  und  $\omega_L$ . Die Forderung, daß  $L_M$  ein Minimum sein soll, liefert nun

$$\text{aus } \frac{\partial L_M}{\partial \dot{\gamma}_L} = 0, \quad \text{daß } \frac{\tau_D}{\tau_L} = \frac{1 - \frac{1}{c}}{1 - \frac{1}{a}}, \quad \text{und hiermit}$$

$$\text{aus } \frac{\partial L_M}{\partial \omega_L} = 0; \quad \text{daß } \frac{2 T_D \omega_D}{2 T_L \omega_L} = \frac{1 - \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{c}} \cdot \frac{G_D}{G_L}.$$

Damit gewinnt man leicht das Ergebnis:

$$\tau_M = \frac{\eta_M \cdot \dot{\gamma}_M}{1 + (2 T_M \omega_M)^2}; \quad \sigma_M = \tau_M \cdot (2 \Theta_M \cdot \omega_M) \dots \dots \dots (35),$$

worin  $\eta_M$ ,  $T_M$  und  $\Theta_M$  Konstante sind, die durch die Werte der Teile  $L$  und  $D$  und die Mischungsgrößen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bestimmt sind.

Das Minimalprinzip liefert also nicht eine Strukturviskosität mit einer „mittleren Asymptote“  $\eta_\infty$ . Vielmehr verhält sich das Gemisch ähnlich einer Maxwell'schen Flüssigkeit, jedoch mit dem Unterschied, daß die Normalspannung  $\sigma_M$  durch eine dritte Konstante  $\Theta_M \neq T_M$  gekennzeichnet ist.

4b) Ersetzt man dagegen das Minimalprinzip durch die [mit Gl. (32) verträgliche] Annahme, daß die Kontinuität vollkommen gewahrt bleibt:

$$\dot{\gamma}_D = \dot{\gamma}_L = \dot{\gamma}_M = \dot{\gamma} \quad \text{und} \quad \omega_D = \omega_L = \omega_M = \omega \dots \dots \dots (36),$$



so findet man das Ergebnis:

$$\left. \begin{aligned} \tau_M &= \left[ \frac{b \cdot \eta_D}{1 + (2 T_D \omega)^2} + \frac{(1-b) \cdot \eta_L}{1 + (2 T_L \omega)^2} \right] \cdot \dot{\gamma} = b G_D \cdot \frac{\tau_D}{G_D} + (1-b) G_L \cdot \frac{\tau_L}{G_L} \\ \sigma_M &= \left[ \frac{b \cdot \eta_D T_D}{1 + (2 T_D \omega)^2} + \frac{(1-b) \eta_L T_L}{1 + (2 T_L \omega)^2} \right] \cdot \dot{\gamma} \cdot (2\omega) \end{aligned} \right\} \dots (37).$$

Dies liefert mit  $\omega = \frac{1}{2} \dot{\gamma}$  für die laminare Strömung genau die an Bild 9 erläuterte Überlagerung zu einer „Quasi-Strukturviskosität“ mit

$$\eta_0 = b \eta_D + (1-b) \eta_L \quad \text{und} \quad \eta_{\infty (\text{Mittel})} = (1-b) \eta_L \quad \text{und} \quad \eta_{\infty (\text{Ende})} = 0.$$

Insbesondere für schwache Lösungen ( $b \ll 1$ ) folgt  $\eta_{\infty (\text{Mittel})} \approx \eta_L$ . Zur Normalspannung ist noch zu vermerken, daß eine Formulierung  $\sigma_M = \tau_M \cdot (2 \Theta_M \omega)$  aus Gl. (37) nicht möglich ist, da  $\Theta_M$  von  $\omega$  abhängig sein müßte.

Die Gl. (37) mit ihrer Darstellung nach Bild 9 treten bei diesen Annahmen für das Gemisch an die Stelle der Gl. (5) und mit  $\omega = \frac{1}{2} \dot{\gamma}$  an die Stelle der Gl. (10) mit ihrer Darstellung in Bild 3.

Zum unmittelbaren Vergleich mit den üblichen Darstellungen von Versuchsergebnissen wäre hiermit wieder die Integration über den Rohrquerschnitt auszuführen, um die der Gl. (28) und Bild 6 entsprechende Beziehung zu erhalten. Dabei werden auch die Sprungstücke  $S-L$  gekrümmt und die vier Knicke geschwächt, so daß sie bei Versuchsauswertungen leicht zu einem glatten Kurvenzug nach Bild 8 geglättet werden, welcher Bild 9 ähnlicher wird. Doch wurden auch Knicke beobachtet<sup>8)</sup>, die mit dem Punkt  $L$  des langsam relaxierenden Gemengteiles zu identifizieren wären.

Im ganzen zeigt sich, daß die Deutung der Strukturviskosität als einer elasto-viskosen Wirkung naheliegt. Durch die gegebene Näherungsrechnung ist der Nachweis jedoch nicht zu liefern, da die Art der Näherungsannahmen das Ergebnis der Berechnung wesentlich beeinflusst.

<sup>8)</sup> Vgl. W. Philippoff, Kolloid-Z. Bd. 83 (1938), S. 170, Figur 7.

## Über die Wärmespannungen in einem Körper.

Von W. Schmeidler in Berlin-Frohnau.

Die Spannungen in einem Körper, der einem beliebigen stationären Temperaturfeld ausgesetzt ist, berechnet man mit Hilfe eines Systems von drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Komponenten des Verschiebungsvektors, wozu als Randbedingungen die Gleichungen hinzutreten, die das Verschwinden der Normalspannungen und Schubspannungen an der Oberfläche aussagen. Dieses Problem wird im folgenden auf ein System von vier linearen Integralgleichungen für die kubische Ausdehnung und die drei Komponenten des Rotors des Verschiebungsvektors zurückgeführt.

If a solid is in an arbitrary constant field of temperature, its stresses are computed by a system of three partial differential equations of the second order for the components of the vector of displacement. As boundary conditions further equations are added expressing that normal and shearing stresses are vanishing at the surface. In this report, the problem is reduced to a system of four linear integral equations for the coefficient of cubic expansion and the three components of a vector that is the curl of the vector of the displacement.

Les tensions internes, qui apparaissent dans un corps soumis à l'action d'un champ de température stationnaire et quelconque, sont en général déterminées par un système de 3 équations aux dérivées partielles du 2<sup>e</sup> ordre, relatives aux composantes du vecteur de déplacement. Les limites d'intégration sont données par la condition, que les tensions normales et tangentielles disparaissent à la superficie du corps. Dans ce qui suit ce problème est réduit à un système de 4 équations intégrales linéaires de la dilatation volumétrique et des 3 composantes du rotor du vecteur de déplacement.

Напряжения, возникающие в телах, подверженных действию произвольного постоянного температурного поля, вычисляются при помощи системы трех дифф. уравнений второго порядка в частных производных для составляющих вектора перемещения, причем пределы интегрирования определяются тем условием, что нормальные и срезывающие напряжения обращаются в нуль на поверхности тела. Ниже эта задача сводится к системе 4-х линейных интегральных уравнений для объемного расширения и для трех составляющих ротора вектора смещения.

Das Randwertproblem der Verschiebungen eines Körpers unter dem Einfluß eines stationären Temperaturfeldes wird bekanntlich durch drei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei Randbedingungen beschrieben. Um über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eine Aussage machen zu können, die in dieser Allgemeinheit meines Wissens noch nicht vorliegt, sowie um die Lösung der praktischen Berechnung zugänglicher zu machen, wird die Aufgabe im folgenden<sup>1)</sup> auf ein System von vier linearen Integralgleichungen für

<sup>1)</sup> Die Anregung, hier nach Integralgleichungen zu suchen, verdanke ich Herrn W. Kucharski.

die kubische Ausdehnung und die drei Komponenten des Rotors des Verschiebungsvektors zurückgeführt; aus den gefundenen vier Funktionen lassen sich dann die Komponenten des Verschiebungsvektors ausdrücken, und zwar eindeutig bis auf willkürliche additive Konstanten.

Es werden dabei bekannte Begriffe und Sätze aus der Potentialtheorie benutzt, vor allem die sogenannte Greensche Funktion zweiter Art des gegebenen Bereiches. Ich verweise auf die beiden Arbeiten:

- Heinrich Jnng: Die zweiten Greenschen Funktionen als Kerne vom homogenen Integralgleichungen zweiter Art, Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 163 (1930), S. 89—102.  
Leon Lichtenstein: Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie, Mathematische Zeitschrift Bd. 20 (1924), S. 21—28.

Wir bezeichnen mit  $u, v, w$  die Komponenten des Verschiebungsvektors  $\mathbf{v}$ , mit  $e = \operatorname{div} \mathbf{v}$  die kubische Ausdehnung, mit  $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$  das gegebene Temperaturfeld, das der Gleichung  $\Delta \vartheta = 0$  genügt, und mit  $\alpha$  und  $m$  die bekannten, als konstant betrachteten Materialkonstanten des beliebigen, aber regulär begrenzten Körpers. Dann gelten die Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \frac{2(m+1)\alpha}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \Delta v &= \frac{2(m+1)\alpha}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} \\ \Delta w &= \frac{2(m+1)\alpha}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1),$$

oder vektoriell geschrieben:

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{2(m+1)\alpha}{m-2} \operatorname{grad} \vartheta - \frac{m}{m-2} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{v}) \dots \dots \dots (1a).$$

An der Oberfläche gelten die Randbedingungen, die das Verschwinden der Normalspannung und der Schubspannungen aussagen:

$$\left. \begin{aligned} 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{e}{m-2} - \frac{m+1}{m-2} \alpha \vartheta\right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \cos(n, z) &= 0 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cos(n, x) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{e}{m-2} - \frac{m+1}{m-2} \alpha \vartheta\right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \cos(n, z) &= 0 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \cos(n, y) + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{e}{m-2} - \frac{m+1}{m-2} \alpha \vartheta\right) \cos(n, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Hierbei soll  $\mathbf{n}$  die innere Normale bedeuten, deren Einheitsvektor mit  $\mathbf{n}$  bezeichnet werde. Versteht man unter  $\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}$  den Vektor mit dem Komponenten  $n \operatorname{grad} u, n \operatorname{grad} v, n \operatorname{grad} w$ , so kann man die Randbedingungen in der Form

$$2\left[\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \frac{e}{m-2} \mathbf{n} - \frac{m+1}{m-2} \alpha \vartheta \mathbf{n}\right] + [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}] = 0 \dots \dots \dots (2a)$$

schreiben.

Für das folgende ist nun die Einführung der Greenschen Funktion  $G(P, Q)$  zweiter Art des gegebenen Bereiches erforderlich. Diese hängt bekanntlich von zwei inneren Punkten  $P(x, y, z)$  und  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  ab, von denen der erste als Aufpunkt, der zweite als Quellpunkt bezeichnet wird. Sie kann physikalisch gedeutet werden als Temperatur in  $P$  im Falle einer Wärmeströmung in dem Bereich, die dort einen einzigen Quellpunkt  $Q$  von der Quellstärke Eins aufweist und im übrigen dadurch festgelegt ist, daß die Abströmung über den Rand hin überall gleichmäßig erfolgt. Mathematisch bedeutet dies:

1.  $G(P, Q)$  ist von der Form

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}} + g(P, Q), \quad r_{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

und  $g(P, Q)$  ist im ganzen Bereich mit seinen Ableitungen endlich und stetig.

2. Bei Differentiation nach  $x, y, z$  gilt  $\Delta g = 0$  im ganzen Innern, also auch  $\Delta G = 0$  außer für  $P = Q$ .

3. Am Rande ist, falls  $O$  die Oberfläche des Körpers bedeutet, bei Differentiation nach  $P$ :

$$\frac{\partial G}{\partial n} = C = \frac{1}{O}.$$

4. Bei passender Wahl der bei festem  $Q$  noch freien additiven Konstanten als Funktion von  $Q$  ist die Funktion symmetrisch in  $P$  und  $Q$ :

$$G(P, Q) = G(Q, P).$$



Wir gehen nun aus von der Greenschen Formel

$$\iiint_{(\mathfrak{B})} (U \Delta V - V \Delta U) dk = - \iint_{(o)} \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma,$$

die für zwei beliebige in  $\mathfrak{B}$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $U$  und  $V$  gilt, und wenden sie auf den Bereich  $\mathfrak{B}'$  an, der aus dem gegebenen durch Ausschluß einer kleinen Kugel um  $Q$  entsteht. Dann erhält man in bekannter Weise, falls der Radius der Kugel gegen Null strebt, für  $V = G$  die Darstellung:

$$U(Q) = - \iiint_{(\mathfrak{B})} G \Delta U dk - \iint_{(o)} G \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{O} \iint_{(o)} U d\sigma$$

für jede beliebige in  $\mathfrak{B}$  zweimal stetig differenzierbare Funktion  $U$ . Die Anwendung dieser Formel auf die Komponenten des Verschiebungsvektors ergibt unter Weglassung des letzten Gliedes, das eine additive Konstante darstellt, die in unserm Falle sowieso willkürlich bleibt, die Vektorgleichung:

$$\mathbf{v}(Q) = - \iiint_{(\mathfrak{B})} G \Delta \mathbf{v} dk - \iint_{(o)} G \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} d\sigma = - \iiint_{(\mathfrak{B})} G \Delta \mathbf{v} dk - \iint_{(o)} G \mathbf{n} \cdot \text{grad } \mathbf{v} d\sigma \quad (3).$$

Hierin setzen wir für  $\Delta \mathbf{v}$  und  $\mathbf{n} \cdot \text{grad } \mathbf{v}$  die Werte aus Gl. (1a) und (2a) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(Q) = & - \frac{2(m+1)}{m-2} \alpha \iiint_{(\mathfrak{B})} G \text{grad } \vartheta dk + \frac{m}{m-2} \iiint_{(\mathfrak{B})} G \text{grad } e dk + \iint_{(o)} \frac{G e \mathbf{n}}{m-2} d\sigma \\ & - \frac{m+1}{m-2} \alpha \iint_{(o)} G \vartheta \mathbf{n} d\sigma + \frac{1}{2} \iint_{(o)} G [\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{v}] d\sigma. \end{aligned}$$

Um die Ableitungen von  $e$  unter dem Raumintegral zu beseitigen, wenden wir auf den Bereich  $\mathfrak{B}'$  die Formel des Gaußschen Satzes an und finden:

$$\iiint_{(\mathfrak{B})} (G \text{grad } e + e \text{grad } G) dk = - \iint_{(o)} e G \mathbf{n} d\sigma - \iint_{(k)} e G \mathbf{n} d\sigma.$$

Lassen wir wieder den Radius von  $k$  gegen Null streben, so wird auch das letzte Integral Null und es bleibt

$$\iiint_{(\mathfrak{B})} (G \text{grad } e + e \text{grad } G) dk = - \iint_{(o)} e G \mathbf{n} d\sigma.$$

Demnach erhalten wir mit  $\mathbf{q} = \text{rot } \mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v}(Q) = - \left. \begin{aligned} & \frac{2(m+1)}{m-2} \alpha \iiint_{(\mathfrak{B})} G \text{grad } \vartheta dk - \frac{m}{m-2} \iiint_{(\mathfrak{B})} e \text{grad } G dk - \frac{m-1}{m-2} \iint_{(o)} G e \mathbf{n} d\sigma \\ & - \frac{m+1}{m-2} \alpha \iint_{(o)} G \vartheta \mathbf{n} d\sigma + \frac{1}{2} \iint_{(o)} G [\mathbf{n} \times \mathbf{q}] d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (4).$$

Einführung des als bekannt zu betrachtenden Vektors

$$-\frac{2(m+1)}{m-2} \alpha \iiint_{(\mathfrak{B})} G \text{grad } \vartheta dk - \frac{m+1}{m-2} \alpha \iint_{(o)} G \vartheta \mathbf{n} d\sigma = \mathfrak{f}(Q)$$

und Divergenzbildung liefert

$$\begin{aligned} e(Q) = \text{div}_Q \mathfrak{f}(Q) - \frac{m}{m-2} \text{div}_Q \left\{ \iiint_{(\mathfrak{B})} e \text{grad } G dk - \frac{m-1}{m-2} \iint_{(o)} (\text{grad}_Q G \cdot \mathbf{n}) e d\sigma \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \iint_{(o)} (\text{grad}_Q G \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{q}]) d\sigma \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

Dabei bedeutet der Index  $Q$  jedesmal, daß die betreffende Operation bezüglich  $\xi, \eta, \zeta$  auszuführen ist.

In Gl. (5) kommen außer der unbekannten Funktion  $e$  noch die Komponenten  $q_x, q_y, q_z$  des ebenfalls unbekannten Vektors  $\mathbf{q} = \text{rot } \mathbf{v}$  vor. Zu ihrer Bestimmung bilden wir vermöge Gl. (4) den Rotor und finden

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(Q) = \text{rot}_Q \mathfrak{f}(Q) - \frac{m}{m-2} \text{rot}_Q \left\{ \iiint_{(\mathfrak{B})} e \text{grad } G dk - \frac{m-1}{m-2} \iint_{(o)} [\text{grad}_Q G \times \mathbf{n}] e d\sigma \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \iint_{(o)} [\text{grad}_Q G \times [\mathbf{n} \times \mathbf{q}]] d\sigma \right\} \quad (6). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (5) und (6) stellen zusammen ein System von vier linearen Integralgleichungen für die vier unbekannten Funktionen  $e, q_x, q_y, q_z$  dar, das also erfüllt sein muß, wenn die Gleichungen (1a) und (2a) einen Lösungsvektor  $\mathbf{v}$  besitzen sollen.

Wir wollen jetzt die Umkehrung dieses Satzes beweisen. Es sei uns gelungen, die vier Integralgleichungen (5) und (6) durch gewisse Funktionen  $e, q_x, q_y, q_z$  zu lösen, dann wollen wir zeigen,

daß der Vektor  $\mathbf{v}$ , der durch diese Funktionen mit Hilfe der Gleichungen (4) bestimmt ist, den Differentialgleichungen (1a) und den Randbedingungen (2a) genügt.

Zunächst gilt selbstverständlich für diesen Vektor  $\mathbf{v}$ , daß

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{v} &= e \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)\end{aligned}$$

ist. Ferner bilden wir die Deltaableitung und erhalten:

$$\Delta \mathbf{v}(Q) = \Delta \mathbf{f}(Q) - \frac{m}{m-2} \Delta_Q \iiint e \operatorname{grad} G dk - \frac{m-1}{m-2} \Delta_Q \iint G e n d\sigma + \frac{1}{2} \Delta_Q \iint G [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}] d\sigma.$$

Für einen inneren Punkt  $Q$  sind die Oberflächenintegrale sämtlich regulär und ihre Deltaableitungen Null, weil wegen der Symmetrie der Green'schen Funktion die Gleichung  $\Delta G = 0$  auch bei Differentiation nach  $\xi, \eta, \zeta$  gilt. Für die Raumintegrale ist die Poisson'sche Gleichung

$$\Delta_Q \iiint \frac{\sigma}{r_{PQ}} dk = -4\pi\sigma(Q)$$

zu beachten. Wir finden:

$$\begin{aligned}\Delta_Q \iiint e \operatorname{grad} G dk &= \Delta_Q \iiint e \operatorname{grad} \left( \frac{1}{4\pi r_{PQ}} + g \right) dk = -\Delta_Q \operatorname{grad}_Q \iiint \frac{e}{4\pi r_{PQ}} dk \\ &\quad + \Delta_Q \iiint e \operatorname{grad} g dk = -\operatorname{grad}_Q \Delta_Q \iiint \frac{e}{4\pi r_{PQ}} dk + \iiint e \operatorname{grad} (\Delta_Q g) dk \\ &= +\operatorname{grad}_Q e(Q),\end{aligned}$$

ebenso ergibt sich

$$\Delta_Q \mathbf{f}(Q) = -\frac{2(m+1)}{m-2} \alpha \Delta_Q \iiint G \operatorname{grad} \vartheta dk = \frac{2(m+1)\alpha}{m-2} \operatorname{grad}_Q \vartheta(Q),$$

und daher

$$\Delta_Q \mathbf{v}(Q) = \frac{2(m+1)\alpha}{m-2} \operatorname{grad}_Q \vartheta(Q) - \frac{m}{m-2} \operatorname{grad}_Q e(Q),$$

so daß die Gleichung (1a) erfüllt ist.

Zum Beweise von Gl. (2a) vergleichen wir die Darstellung Gl. (4) des Vektors  $\mathbf{v}$  mit der stets gültigen Ausgangsdarstellung Gl. (3) durch die Green'sche Funktion, die infolge von Gl. (1a) die Gestalt annimmt:

$$\mathbf{v}(Q) = -\frac{2(m+1)\alpha}{m-2} \iiint G \operatorname{grad} \vartheta dk + \frac{m}{m-2} \iiint G \operatorname{grad} e dk - \iint G \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} d\sigma$$

oder mit Hilfe der Umformung infolge des Gauß'schen Satzes:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(Q) &= -\frac{2(m+1)\alpha}{m-2} \iiint G \operatorname{grad} \vartheta dk - \frac{m}{m-2} \iiint e \operatorname{grad} G dk - \frac{m}{m-2} \iint G e n d\sigma \\ &\quad - \iint G \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} d\sigma.\end{aligned}$$

Die Vergleichung mit Gl. (4) verlangt jetzt, daß

$$\begin{aligned}-\frac{m}{m-2} \iint G e n d\sigma - \iint G \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} d\sigma &= -\frac{m-1}{m-2} \iint G e n d\sigma - \frac{m+1}{m-2} \alpha \iint G \vartheta \mathbf{n} d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint G [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}] d\sigma\end{aligned}$$

oder

$$\iint G \left\{ \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \frac{e \mathbf{n}}{m-2} - \frac{m+1}{m-2} \alpha \vartheta \mathbf{n} + \frac{1}{2} [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}] \right\} d\sigma = 0$$

sein muß. Wir behaupten, daß hieraus das Verschwinden der geschweiften Klammer an der Oberfläche folgt. In der Tat gilt, wenn wir diese mit  $V$  bezeichnen:

$$\iint G V d\sigma = 0.$$

Da in  $G$  eine additive Konstante völlig willkürlich bleibt, so muß notwendig

$$\iint V d\sigma = 0$$

sein. Es gibt daher eine stetige Fortsetzung der Randwerte  $V$  in das Innere, die der Gleichung  $\Delta V = 0$  genügt und in der Form

$$V(P) = -\iint G(P, Q) \frac{\partial V}{\partial n_Q} d\sigma_Q$$



dargestellt werden kann. Hieraus folgt

$$0 = \iint G(R, P) V(P) d\sigma_P = - \iint G(R, P) \iint G(P, Q) \frac{\partial V}{\partial n_Q} d\sigma_Q d\sigma_P$$

$$0 = - \iint \left( \iint G(R, P) \frac{\partial V}{\partial n_R} d\sigma_R \iint G(P, Q) \frac{\partial V}{\partial n_Q} d\sigma_Q \right) d\sigma_P,$$

und daher wegen  $G(R, P) = G(P, R)$  notwendig

$$-V(P) = \iint G(P, Q) \frac{\partial V}{\partial n_Q} d\sigma_Q = 0.$$

Wegen der Stetigkeit gilt dies auch am Rande; damit ist die Gültigkeit der Randbedingungen Gl. (2a) bewiesen. Insgesamt haben wir also gezeigt:

Die Auflösung der Differentialgleichungen (1a) durch einen Vektor  $\mathbf{v}$ , der den Randbedingungen Gl. (2a) genügt, ist gleichwertig mit der Lösung der vier Integralgleichungen (5) und (6).

Wir wollen nun die Integralgleichungen noch etwas umformen, um die Unstetigkeiten in den Kernfunktionen der räumlichen Integrale zu entfernen. Wir benutzen hierzu wieder die Poisson'sche Gleichung und erhalten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_Q \iint G \operatorname{grad} \vartheta dk &= -\operatorname{div}_Q \iint \vartheta \operatorname{grad} G dk - \operatorname{div}_Q \iint G \vartheta n d\sigma \\ &= \operatorname{div}_Q \operatorname{grad}_Q \iint \int \frac{\vartheta}{4\pi r_{PQ}} dk - \iint \int \vartheta \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \zeta} \right) dk \\ &\quad - \iint (\operatorname{grad}_Q G \cdot \mathbf{n}) \vartheta d\sigma = -\vartheta(Q) - \iint \int \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \zeta} \right) \vartheta dk \\ &\quad - \iint (\operatorname{grad}_Q G \cdot \mathbf{n}) \vartheta d\sigma, \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}_Q \iint \int e \operatorname{grad} G dk = e(Q) + \iint \int \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \zeta} \right) e dk.$$

Dadurch ergibt sich aus Gl. (5):

$$\begin{aligned} e(Q) &= \frac{2(m+1)}{m-2} \alpha \vartheta(Q) + \frac{2(m+1)\alpha}{m-2} \iint \int \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \zeta} \right) \vartheta dk \\ &\quad + \frac{m+1}{m-2} \alpha \iint (\operatorname{grad}_Q G \cdot \mathbf{n}) \vartheta d\sigma - \frac{m}{m-2} e(Q) - \frac{m}{m-2} \iint \int \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \zeta} \right) e dk \\ &\quad - \frac{m-1}{m-2} \iint (\operatorname{grad}_Q G \cdot \mathbf{n}) e d\sigma + \frac{1}{2} \iint \operatorname{grad}_Q G \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{q}] d\sigma, \end{aligned}$$

oder nach Vereinigung zusammengehöriger Glieder:

$$\left. \begin{aligned} e(Q) &= \frac{m+1}{m-1} \alpha \vartheta(Q) + \frac{m+1}{m-1} \alpha \iint \int \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \zeta} \right) \vartheta dk \\ &\quad + \frac{m+1}{2(m-1)} \alpha \iint (\operatorname{grad}_Q G \cdot \mathbf{n}) \vartheta d\sigma - \frac{m}{2(m-1)} \iint \int \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial \eta} + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \zeta} \right) e dk \\ &\quad - \frac{1}{2} \iint \operatorname{grad}_Q G \cdot \mathbf{n} e d\sigma + \frac{m-2}{4(m-1)} \iint (\operatorname{grad}_Q G \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{q}]) d\sigma \end{aligned} \right\} \cdot (5a).$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \iint \int \frac{\partial G}{\partial z} e dk - \frac{\partial}{\partial \zeta} \iint \int \frac{\partial G}{\partial y} e dk &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \iint \int \frac{1}{r_{PQ}} e dk - \frac{\partial}{\partial \zeta} \iint \int \frac{1}{r_{PQ}} e dk \right\} \\ &\quad + \iint \int \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \eta \partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta \partial y} \right) e dk = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} \iint \int \frac{e}{r_{PQ}} dk - \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \iint \int \frac{e}{r_{PQ}} dk \right\} \\ &\quad + \iint \int \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \eta \partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta \partial y} \right) e dk, \end{aligned}$$

und hierin verschwindet das erste Glied, weil die Vertauschbarkeit der Differentiationsfolgen für den Fall einer homogenen Kugel direkt erweisbar ist, für einen beliebigen Bereich aber daraus durch

Abgrenzung einer kleinen Kugel um  $Q$  folgt. Demnach erhalten wir:

$$q(Q) = \operatorname{rot}_Q f(Q) - \frac{m}{m-2} \iiint \operatorname{rot}_Q \operatorname{grad} g e d k - \frac{m-1}{m-2} \iint [\operatorname{grad}_Q G x n] e d o + \frac{1}{2} \iint [\operatorname{grad}_Q G x [n x q]] d o \quad (6a).$$

Die Gleichungen (5a) und (6a), die den früheren Integralgleichungen (5) und (6) vollkommen gleichwertig sind, enthalten nur reguläre Kernfunktionen, solange  $Q$  ein innerer Punkt des Bereiches ist. Allerdings treten gleichzeitig räumliche und Flächenintegrale auf, so daß es sich nach der von A. Kneser eingeführten Sprechweise um ein System von „belasteten“ Integralgleichungen handelt. Auf Grund der allgemeinen Theorie dieser Gleichungen ergibt sich dann Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit der Lösung und damit die Existenz des gesuchten Lösungsvektors  $v$  und seine Eindeutigkeit bis auf additive Konstanten.

Eingegangen: 11. Juli 47.

## Die Stabilitätsfrage bei rückgekoppelten Verstärkern II<sup>1)</sup>.

Von N. Joachim Lehmann in Dresden.

### Teil II: Anwendungen und Ergänzungen zur Theorie im Teil I.

(Insbesondere Behandlung von „mehrdimensionalen“ Verstärkern.)

#### 1. Ein einfaches Beispiel für den eindimensionalen Verstärker.

(Ein mehrstufiges Verstärkergerät nach Nyquist.) Bild 4.

Wie das Bild 4 zeigt, handelt es sich um einen vierstufigen Verstärker, dessen „Verstärkerelemente“  $V_1$  bis  $V_4$  wie Röhrenverstärker mit negativer Gittervorspannung einen unendlich großen Eingangswiderstand haben und in der jeweils darunter angegebenen Form arbeiten;  $V$  ist dabei eine reelle Größe. Die Übersetzung des Apparates wird:

$$\ddot{U}_R(z) = \frac{\left(\frac{V}{CR}\right)^4}{\left(z + \frac{1}{CR}\right)^4} \dots \dots \dots (29).$$

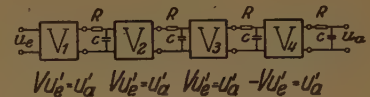


Bild 4. Mehrstufiger Spannungsverstärker.  
( $u_e'$  und  $u_a'$  sind die Ein- und Ausgangsspannung am zugehörigen Verstärkerelement  $V_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ )).

Der Spannungsverlauf an der Verstärkerausgangsseite hat bei offener Eingangsseite nach Gl. (5) die Form:

$$u_a(u_e \equiv 0) = (p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3) e^{-\frac{t}{RC}} \dots \dots \dots (30);$$

beim rückgekoppelten Gerät wird entsprechend Gl. (17):

$$u(t) = c_1 e^{(\delta_1 + i\omega)t} + c_2 e^{(\delta_2 + i\omega)t} + c_3 e^{(\delta_1 - i\omega)t} + c_4 e^{(\delta_2 - i\omega)t} \dots \dots \dots (31).$$

$$= a e^{\delta_1 t} \sin(\omega t + \varphi_1) + b e^{\delta_2 t} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Dabei ist  $\delta_1 = \frac{1}{RC} \left( \frac{V}{\sqrt{2}} - 1 \right)$ ;  $\delta_2 = -\frac{1}{RC} \left( \frac{V}{\sqrt{2}} + 1 \right)$ ;  $\omega = \frac{V}{\sqrt{2} RC}$  gesetzt.

Der rückgekoppelte Verstärker arbeitet also im Falle  $V < \sqrt{2}$  stabil, es klingen alle Schwingungen ab. Bei  $V > \sqrt{2}$  wird das Gerät instabil, eine Teilschwingung klingt an; im Grenzfall  $V = \sqrt{2}$  bildet eine sinusförmige Schwingung mit der Frequenz  $\omega_0 = 1/RC$  den stationären Zustand. Das Beispiel ist besonders instruktiv, da hier durch die Rückkopplung sinusförmige Schwingungen erzeugt werden, obwohl keine LC-Glieder vorhanden sind. Ähnliche RC-Schaltungen werden auch in der Praxis als Summer verwendet.

#### 2. Die Stabilitätsuntersuchung beim allgemeinsten Vierpol.

(Der „dreidimensionale“ Verstärker.)<sup>2)</sup>

Die Ströme und Spannungen beim Vierpol (die auf eine willkürlich gewählte Klemme bezogen sind) werden in der aus Bild 5 ersichtlichen Weise bezeichnet. Es sind nur drei Spannungen bzw.

<sup>1)</sup> Der erste Teil dieser Arbeit ist erschienen in Z. angew. Math. Mech. Bd. 28 (1947), S. 23–29.

<sup>2)</sup> In diesem Abschnitt wird der Vierpol möglichst allgemein untersucht — zur Begründung der Theorie und den verwendeten Kenngrößen vergleiche man z. B. F. Strecker und R. Feldtkeller, Grundlagen der Theorie des allgemeinen Vierpols. Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 6 (1929), S. 93–112 oder R. Feldtkeller, Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. 3. Aufl. Leipzig: S. Hirzel 1943. (Hier findet sich auch ein größeres Schriftumsverzeichnis über die Vierpoltheorie.) Allerdings ist zu beachten, daß sich die wesentlichen Teile der in der Praxis benutzten „Vierpoltheorie“ nur auf das Zweiklemmenpaar beziehen, außerdem wird nicht mehr auf Differentialgleichungen zurückgegriffen, sondern es wird nur der eingeschwingene Zustand betrachtet. Hierzu vgl. man z. B. H. G. Bärwald, Der Geltungsbereich der Strecker-Feldtkellerschen Matrizengleichungen von Vierpolsystemen. Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 9 (1932), S. 31–38.





Bild 5. Der Vierpol.  
Bei Arbeitsrichtung I (der Vierpol wird als Klemmenpaar 1,3; 2,4 betrachtet) gibt die gestrichelte Verbindung die Rückkopplungs-, die strichpunktlierte die Kurzschlußschaltung an. Bei Bezug auf die Arbeitsrichtung II ist das umgekehrt.

Ströme voneinander unabhängig, die vierte Größe ist jeweils durch ein Kirchhoffsches Gesetz bestimmt.

Zwischen den Spannungen und Strömen bestehen nach der allgemeinen Vierpoltheorie die Differentialbeziehungen

$$\left. \begin{aligned} 0 &= L_{11} x_1 + L_{14} x_4 + L_{15} x_5 + L_{16} x_6 \\ 0 &= L_{22} x_2 + L_{24} x_4 + L_{25} x_5 + L_{26} x_6 \\ 0 &= L_{33} x_3 + L_{34} x_4 + L_{35} x_5 + L_{36} x_6 \end{aligned} \right\} \quad (32).$$

Dabei sind die  $L_{ik}$  entsprechend  $N$  und  $M$  von Gl. (1)/(2) lineare Differentialoperatoren, die zugehörigen charakteristischen Polynome werden durch entsprechende deutsche Buchstaben bezeichnet:  $\mathfrak{L}_{ik}(z)$ . Die Lösung des Differentialgleichungssystems (32) interessiert hier nur im Hinblick auf die Stabilitätsuntersuchung für den rückgekoppelten

Vierpol. Dazu schalten wir das Eingangs- und Ausgangsklemmenpaar in der in Bild 5 ersichtlichen Weise zusammen. Es wird  $x_4 = x_5$  ( $i_1 = i_2$ ),  $x_3 = U_3 = 0$ ,  $x_1 = x_2$  ( $U_1 = U_2$ ) und Gl. (32) liefert damit für den rückgekoppelten Vierpol das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= L_{11} x_1 + (L_{14} + L_{15}) x_5 + L_{16} x_6 \\ 0 &= L_{22} x_1 + (L_{24} + L_{25}) x_5 + L_{26} x_6 \\ 0 &= (L_{34} + L_{35}) x_5 + L_{36} x_6 \end{aligned} \right\} \quad (33).$$

Rechnet man mit den Operatoren  $L_{ik}$  wie mit Polynomen<sup>3)</sup>, so findet man für  $x_k$  ( $k = 1, 5$  oder  $6$ ) als Verträglichkeitsbedingungen für das homogene Gleichungssystem (33) die Differentialgleichung:

$$\{L_{11}[(L_{24} + L_{25})L_{36} - (L_{34} + L_{35})L_{26}] + L_{22}[(L_{34} + L_{35})L_{16} - (L_{14} + L_{15})L_{36}]\} x_k = 0 \quad (34).$$

Diese Gleichung tritt an Stelle der Rückkopplungsbeziehung (16) der eindimensionalen Theorie; der Spannungs- ( $x_1$ ) und Stromverlauf ( $x_5, x_6$ ) hat entsprechend die Form von Gl. (17). Dabei bestehen allerdings im allgemeinen zwischen den in den zu  $x_k$  gehörigen Polynomen  $P_{\sigma}^{(\mu)}$  auftretenden Konstanten  $p_{\sigma, \mu}$  Beziehungen, die durch Eintragen der Gl. (17) entsprechenden Ansätze in das System (33) berechnet werden können. Für die Stabilitätsuntersuchung reicht die Feststellung, daß jede charakteristische Zahl  $z_{R, e}$  der zu (34) gehörigen Hauptgleichung

$$\mathfrak{L}_{11}[(\mathfrak{L}_{24} + \mathfrak{L}_{25})\mathfrak{L}_{36} - (\mathfrak{L}_{34} + \mathfrak{L}_{35})\mathfrak{L}_{26}] + \mathfrak{L}_{22}[(\mathfrak{L}_{34} + \mathfrak{L}_{35})\mathfrak{L}_{16} - (\mathfrak{L}_{14} + \mathfrak{L}_{15})\mathfrak{L}_{36}] = 0 \quad (35)$$

mit  $x_k = A_k e^{z_{R, e} t}$   $k = 1, 5, 6$  und nicht allen  $A_k = 0$ , zumindest zu einer Lösung von Gl. (33) führt. Daraus entnimmt man sofort, daß der rückgekoppelte Vierpol dann und nur dann stabil arbeiten kann, wenn die Wurzeln  $z_{R, e}$  von Gl. (35) negative Realteile haben; zur rechnerischen Untersuchung dieser ganzen rationalen Funktion stehen wieder die Methoden von I, 3, A bereit. Es sei bemerkt, daß im allgemeinen zur Aufstellung der Hauptgleichung (35) — d. h. zur Stabilitätsuntersuchung des in Richtung I (nach Bild 5) rückgekoppelten Apparates — die Widerstandsmatrix

$$W = - \begin{vmatrix} \frac{\mathfrak{L}_{14} + \mathfrak{L}_{15}}{\mathfrak{L}_{11}} & \frac{\mathfrak{L}_{15}}{\mathfrak{L}_{11}} \\ \frac{\mathfrak{L}_{24} + \mathfrak{L}_{25}}{\mathfrak{L}_{22}} & \frac{\mathfrak{L}_{25}}{\mathfrak{L}_{22}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{W}_{11} & \mathfrak{W}_{12} \\ \mathfrak{W}_{21} & \mathfrak{W}_{22} \end{vmatrix} \quad (36)$$

des als Zweiklemmenpaar 1,3; 2,4 betriebenen Vierpols nicht ausreicht<sup>4)</sup>; für den Praktiker ist daher wichtig, daß die Widerstandsmatrix des Zweiklemmenpaares 1,2; 3,4 sehr häufig zur Stabilitätsuntersuchung genügt. Das ist physikalisch leicht einzusehen. Man entnimmt es aber auch sofort Gl. (36), da die darin vorkommenden Größen zur Untersuchung der Stabilität des eingangs- und ausgangsseitig kurzgeschlossenen Vierpols (nach Bild 5) „beinahe“ ausreichen; mit  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_4 = x_6$  findet man aus Gl. (32) die für die Stabilitätsfrage entscheidende charakteristische Gleichung:

$$\mathfrak{L}_{33}[(\mathfrak{L}_{14} + \mathfrak{L}_{15})\mathfrak{L}_{35} - (\mathfrak{L}_{24} + \mathfrak{L}_{25})\mathfrak{L}_{15}] = 0 \quad (37).$$

Der Klammerausdruck ist aber  $|\mathfrak{W}_{ik}| \mathfrak{L}_{11} \mathfrak{L}_{22}$ , wenn  $|\mathfrak{W}_{ik}|$  die Determinante von  $W$  ist; dieser Ausdruck liefert daher alle Wurzeln von Gl. (37), die nicht nur durch  $\mathfrak{L}_{33}(z) = 0$  bestimmt sind. Häufig läßt sich daher die Stabilität eines beiderseits kurzgeschlossenen Verstärkers einfach aus  $|\mathfrak{W}_{ik}| = 0$  feststellen, genauer wäre aber der Untersuchung Gl. (37) zugrunde zu legen — diese Tatsachen wurden bisher offensichtlich nicht berücksichtigt<sup>5)</sup>.

Weitere Überlegungen, besonders zur Frage der experimentellen Stabilitätsuntersuchung, sollen am wichtigen Sonderfall des Dreipoles dargestellt werden.

<sup>3)</sup> L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen. 3. Aufl., S. 331/334. Berlin: Julius Springer 1930.

<sup>4)</sup> Man vgl. hierzu Abschn. 3.

<sup>5)</sup> Z. B. bei F. Strecker, Anschauliche Theorie der Selbsterregung. A. a. O., Abschn. O 4. Leipzig: Hirzel 1945. Das Buch ist inzwischen unter dem Titel „Die elektrische Selbsterregung“ erschienen.



### 3. Die Stabilitätsuntersuchung beim Dreipol.

Der Vierpol von Bild 5 geht in einen Dreipol über, wenn im Vierpol die Klemmen 3 und 4 verbunden sind:

Von den Vierpolgleichungen (32) bleibt nur noch das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} 0 &= L_{11} x_1 + L_{14} x_4 + L_{15} x_5 \\ 0 &= L_{22} x_2 + L_{24} x_4 + L_{25} x_5 \end{aligned} \right\} \dots (38a).$$

(Man beachte, daß hier immer  $x_3 = 0$  ist, und  $x_1, x_2$  nur von  $x_4$  u.  $x_5$  abhängen können.) Sofern in „Meßschaltung“ (mit einer widerstandslosen Spannungsquelle mit der Ursprungung  $u_S(t)$  im Sender) gearbeitet wird (s. Bild 6) müssen noch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} S(u_S) &= L_{S1} x_1 + L_{S4} x_4 && \text{Sendergleichung} \\ 0 &= L_{E2} x_2 + L_{E5} x_5 && \text{Empfängergleichung} \end{aligned} \right\} \dots (38b)$$

zum System Gl. (38a) hinzugenommen werden.

Koppelt man hier Eingang und Ausgang, bekommt man mit  $x_1 = x_2, x_4 = x_5$  die Rückkopplungshauptgleichung

$$\mathfrak{L}_{11}(\mathfrak{L}_{24} + \mathfrak{L}_{25}) - \mathfrak{L}_{22}(\mathfrak{L}_{14} + \mathfrak{L}_{15}) = 0 \dots (39).$$

Für den Praktiker sei noch der Zusammenhang von Gl. (39) mit den Elementen der Vierpol-Widerstandsmatrix  $W = \|\mathfrak{W}_{ik}\|$  angegeben. Diese Matrix erhält man hier aus den beiden Dreipolgleichungen (38a) durch den Ansatz  $x_1 = \mathfrak{U}_1 e^{i\omega t}, x_2 = \mathfrak{U}_2 e^{i\omega t}, x_4 = \mathfrak{S}_1 e^{i\omega t}, x_5 = \mathfrak{S}_2 e^{i\omega t}$  (wo  $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$  u.  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$  komplexe Spannungs- bzw. Stromamplituden darstellen) und Auflösen nach  $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ :

$$\left\| \begin{array}{cc} \mathfrak{U}_1 & 0 \\ \mathfrak{U}_2 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} -\frac{\mathfrak{L}_{14}(i\omega)}{\mathfrak{L}_{11}(i\omega)} & -\frac{\mathfrak{L}_{15}(i\omega)}{\mathfrak{L}_{11}(i\omega)} \\ -\frac{\mathfrak{L}_{24}(i\omega)}{\mathfrak{L}_{22}(i\omega)} & -\frac{\mathfrak{L}_{25}(i\omega)}{\mathfrak{L}_{22}(i\omega)} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} \mathfrak{S}_1 & 0 \\ \mathfrak{S}_2 & 0 \end{array} \right\| = W \cdot \left\| \begin{array}{cc} \mathfrak{S}_1 & 0 \\ \mathfrak{S}_2 & 0 \end{array} \right\| \dots (40).$$

Dividiert man die Gl. (39) durch  $\mathfrak{L}_{11}(z) \mathfrak{L}_{22}(z)$  und benutzt dann die ins Komplexe fortgesetzten Elemente in der mit Gl. (40) definierten Widerstandsmatrix (an Stelle  $i\omega$  wird immer  $z$  gesetzt), so bekommt man die Gleichung:

$$\mathfrak{W}_{11}(z) + \mathfrak{W}_{12}(z) - \mathfrak{W}_{21}(z) - \mathfrak{W}_{22}(z) = 0 \dots (41),$$

deren Lösungen mit denen von Gl. (39) übereinstimmen, die nicht gleichzeitig auch  $\mathfrak{L}_{11}$  oder  $\mathfrak{L}_{22}$  zu Null machen. Diese Einschränkung hat aber in der Praxis kaum Bedeutung, und man kann bei der Stabilitätsuntersuchung von der Beziehung Gl. (41) ausgehen, welche man durch Multiplikation mit  $\mathfrak{L}_{11}(z)$  u.  $\mathfrak{L}_{22}(z)$  — die als gemeinsamer Teiler von  $\mathfrak{W}_{11}$  und  $\mathfrak{W}_{12}$  bzw.  $\mathfrak{W}_{21}$  und  $\mathfrak{W}_{22}$  leicht zu finden sind — in eine zur Prüfung geeignete ganze rationale Funktion umwandelt.

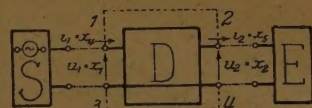
Zur experimentellen Stabilitätsuntersuchung werden die Spannungs- oder Stromübersetzung  $\ddot{u}_{Sp}(i\omega)$  bzw.  $\ddot{u}_J(i\omega)$  der Vierpoltheorie gemessen. Da diese Kenngrößen von der Belastung des Vierpols, also vom Empfänger in der Meßschaltung abhängig sind (entsprechend der Theorie in I, 1), bleibt noch festzustellen, für welchen Abschlußwiderstand diese Größen für die Stabilitätsuntersuchung geeignet sind. Hierzu berechnen wir die beiden Kenngrößen einmal wie in der eindimensionalen Theorie, entsprechend der Definition Gl. (12), in verallgemeinerter Form: Mit der „angelegten Senderspannung“  $u_S = E e^{zt}$  ergibt der Ansatz  $x_{kPart} = x_k e^{zt}$  für die gemessenen Teilspannungen und -ströme  $x_{kPart}$ :

$$x_{kPart} = \frac{(-1)^{k+1} \mathfrak{G}(z) \mathfrak{I}_{Sk}(z) E e^{zt}}{|\mathfrak{L}_{ik}(z)|} \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, 5, 4 \text{ (Reihenfolge)} \\ i = 1, 2, S, E \text{ (beachten)} \end{array} \quad (42).$$

Dabei ist  $|\mathfrak{L}_{ik}(z)|$  die zum Gleichungssystem (38a, b) gehörige Determinante der charakteristischen Polynome  $\mathfrak{L}_{ik}(z)$ ;  $\mathfrak{I}_{ik}(z)$  die zum Element  $\mathfrak{L}_{ik}(z)$  gehörige Unterdeterminante. Wegen  $x_{1Part} = u_{1Part}$ ;  $x_{2Part} = u_{2Part}$  usw. findet man für die verallgemeinerte Strom- und Spannungsübersetzung sofort:

$$\ddot{u}_J(z) = \frac{i_{2Part}}{i_{1Part}} = -\frac{\mathfrak{I}_{S5}}{\mathfrak{I}_{S4}} = \frac{-\mathfrak{L}_{24} \mathfrak{L}_{E2}}{\mathfrak{L}_{25} \mathfrak{L}_{E2} - \mathfrak{L}_{E5} \mathfrak{L}_{22}} = \frac{\mathfrak{W}_{21}(z)}{\mathfrak{R}_A(z) - \mathfrak{W}_{22}(z)} = \ddot{U}_J(\mathfrak{R}_A(z)) \dots (43)$$

$$\ddot{u}_{Sp}(z) = -\frac{\mathfrak{I}_{S2}}{\mathfrak{I}_{S1}} = \frac{\mathfrak{L}_{11} \mathfrak{L}_{24} \mathfrak{L}_{E5}}{\mathfrak{L}_{14} \mathfrak{L}_{22} \mathfrak{L}_{E2} - (\mathfrak{L}_{14} \mathfrak{L}_{25} - \mathfrak{L}_{15} \mathfrak{L}_{24}) \mathfrak{L}_{E5}} = \frac{\mathfrak{W}_{21}}{\mathfrak{W}_{11} + \frac{1}{\mathfrak{R}_A} (\mathfrak{W}_{12} \mathfrak{W}_{21} - \mathfrak{W}_{11} \mathfrak{W}_{22})} = \ddot{U}_{Sp}(\mathfrak{R}_A(z)) \quad (44).$$



Sender, Dreipol Empfänger

Bild 6. Der Dreipol.

Gestrichelt: Rückkopplungsschaltung.  
Strichpunkt: Meßschaltung.



Zur Abkürzung werden die Elemente der Widerstandsmatrix benutzt, und es wird gleichzeitig der ins Komplexe fortgesetzte Abschlußwiderstand  $\Re_A(z)$  eingeführt:

$$\Re_A(z) = \frac{u_2 \text{ Part}}{i_2 \text{ Part}} = -\frac{\mathfrak{L}_{E5}(z)}{\mathfrak{L}_{E2}(z)} \dots \dots \dots (45).$$

Entsprechend zu früheren Überlegungen erkennt man, daß die Nullstellen der Nenner von  $\ddot{u}_J$  bzw.  $\ddot{u}_{Sp}$ , d. h. die Wurzeln von  $\mathfrak{L}_{s4}(z)$  bzw.  $\mathfrak{L}_{s1}(z)$  die charakteristischen Zahlen des eingangsseitig leerlaufenden ( $x_4 = i_1 \equiv 0$ ) bzw. kurzgeschlossenen ( $x_1 = u_1 \equiv 0$ ) mit  $\Re_A(z)$  belasteten Dreipols sind; diese Zahlen können auch positive Realteile haben, wenn die gesamte Meßschaltung stabil arbeitet! Die Stabilität der Meßschaltung ist ja bereits gesichert, wenn die zur Gesamtschaltung  $S-V-E$  gehörigen Eigenschwingungszahlen  $z_{M,r}$  nur negative Realteile haben. Wie oben findet man, daß die  $z_{M,r}$  Nullstellen von  $|\mathfrak{L}_{ik}(z)| = \mathfrak{L}_{s1}(z) \mathfrak{L}_{s4}(z) - \mathfrak{L}_{s4}(z) \mathfrak{L}_{s1}(z) = 0$  sein müssen.

Aus den Gleichungen (43) und (44) folgen die für die Stabilitätsuntersuchung wichtigen Beziehungen:

$$\ddot{U}_J(\Re_A = \mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{B}_{12}) = \frac{\mathfrak{B}_{21}}{\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{B}_{12} - \mathfrak{B}_{22}} = \ddot{U}_{Sp} \left( \frac{\mathfrak{B}_{12} \mathfrak{B}_{21} - \mathfrak{B}_{11} \mathfrak{B}_{22}}{\mathfrak{B}_{12} - \mathfrak{B}_{22}} \right) \dots \dots (46).$$

Durch Vergleich mit Gl. (37) sieht man, daß

$$\ddot{U}_J(\Re_A = \mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{B}_{12}) = 1 \text{ und } \ddot{U}_{Sp} \left( \Re_A = \frac{\mathfrak{B}_{12} \mathfrak{B}_{21} - \mathfrak{B}_{11} \mathfrak{B}_{22}}{\mathfrak{B}_{12} - \mathfrak{B}_{22}} \right) = 1 \dots \dots (47)$$

als Lösungen gerade alle charakteristischen Zahlen  $z_{R,e}$  des rückgekoppelten Dreipols liefert, wenn sie nicht Lücken von  $\ddot{U}_J$  bzw.  $\ddot{U}_{Sp}$  entsprechen. Damit ist gezeigt, daß die Übersetzungen  $\ddot{U}_J(i\omega)$  und  $\ddot{u}_{Sp}(i\omega)$  bei den in Gl. (46) und Gl. (47) angegebenen Abschlußwiderständen wie in I, 3, B  $\ddot{U}_R(i\omega)$  zur Stabilitätsuntersuchung verwendet werden können; die hier benutzten Abschlußwiderstände sind gebrochen rationale Funktionen der Frequenz, sie stimmen im allgemeinen

nicht mit dem Kettenwiderstand  $\Re_K = \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{B}_{22} \pm \sqrt{(\mathfrak{B}_{11} - \mathfrak{B}_{22})^2 + 4 \mathfrak{B}_{12} \mathfrak{B}_{21}})$  des Dreipols überein. Läßt man jedoch auch allgemeinere Funktionen als Abschlußwiderstände zu (deren Realisierbarkeit allerdings vielleicht nur approximativ möglich ist), so kann auch

$$\ddot{U}_J(\Re_A = \Re_K) = \ddot{U}_{Sp}(\Re_A = \Re_K) = 1 \text{ (Kettenübertragungsfaktoren} = 1) \dots \dots (48)$$

zur Stabilitätsuntersuchung verwendet werden. Diese Gleichung, auf die man z. B. bei physikalischen Überlegungen zur Stabilitätsuntersuchung geführt wird, hat die gleichen Lösungen wie Gl. (37), wie man leicht feststellt. Bei der Anwendung der Beziehungen Gl. (24) oder Gl. (28) zur Stabilitätsuntersuchung ist jetzt zu bedenken, daß nicht ohne weiteres  $P = 0$  vorausgesetzt werden kann, wie bei Gl. (45) auseinandergesetzt wurde. Diese Schwierigkeit läßt sich grundsätzlich z. B. durch das Verfahren der analytischen Fortsetzung beseitigen; wie in I, 3 und beim Beispiel in II, 5 gezeigt, wendet man diese Extrapolationsmethode auf kritische Teile der Ortskurve  $\ddot{U}_R(i\omega)$ , wenn diese z. B. einmal links vom Punkte 1 in der  $\ddot{U}$ -Ebene verläuft, an und kommt damit prinzipiell immer zur Entscheidung der Stabilitätsfrage — praktisch schränken aber Rechenaufwand und Genauigkeit den Wert der Methode stark ein. Bei Ortskurven, die mehrere Schlingen bilden, lassen sich aber Instabilitäten gelegentlich nach einer von Strecker<sup>6)</sup> angegebenen Methode einfacher feststellen. Man benutzt dabei, daß die Gleichung

$$f(z) = \ddot{U}_R(z) - \alpha = 0 \text{ (wobei } \alpha \text{ eine beliebige komplexe Zahl ist)} \dots \dots (49)$$

zwar die gleiche Anzahl  $P$  von Polstellen wie  $\ddot{U}_R(z) - 1 = 0$ , aber evtl. eine andere Zahl von Nullstellen  $N_\alpha$  mit positivem Realteil hat. Mit Hilfe des Kriteriums Gl. (21) bzw. nach Gl. (22) kann man für jeden Punkt  $\alpha$  der  $\ddot{U}$ -Ebene  $P - N_\alpha = D_\alpha$  berechnen. (Praktisch läuft das wieder auf die Anwendung des Umlaufkriteriums Gl. (22) hinaus, wobei jetzt  $\Phi$  den Winkel eines Vektors  $\Re$  im Punkte  $\alpha$  gegenüber der  $X$ -Richtung angibt.) Ist für einen Punkt  $\alpha$  der  $\ddot{U}$ -Ebene  $D_\alpha - D_1 = (P - N_\alpha) - (P - N_1) = N_1 - N_\alpha > 0$ , so muß auch  $N_1 > 0$  sein, d. h. das System ist instabil. Sobald  $\ddot{U}_R(z)$  aus mehreren Einzelfaktoren zusammengesetzt ist, kann es zweckmäßig sein, für diese gesondert jeweils eine untere Schranke für die Zahl ihrer Polstellen  $P_e$  festzustellen. Wegen  $P = \sum P_e$  ergibt das dann auch mit  $N_1 = P - D_1$  eine untere Schranke für die interessierende Zahl  $N_1$ . Um  $P_e$  abzuschätzen, trägt man den Teilfaktor  $\ddot{u}_e(i\omega)$  von  $\ddot{U}_R(i\omega)$  in der  $\ddot{U}$ -Ebene auf und bestimmt durch das Umlaufkriterium Gl. (22) oder, wenn es sich um reelle Funktionen handelt, nach Gl. (24/28) evtl. mit der bei Gl. (49) erläuterten Strecker'schen Methode für dieses Teilproblem  $P_e = D_{e\alpha} + N_{e\alpha} > D_{e\alpha}$ . Alle diese Verfahren sind nur sehr bedingt brauchbar, da sie bei einem stabilen Verstärker kein Stabilitätskriterium ergeben. Man wird daher stets bestrebt sein, durch physikalische Betrachtungen bzw. Messungen, z. B. bei primärseitigem Leerlauf eines mit  $\Re_A = \mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{B}_{12}$  belasteten Dreipols, etwas über die Zahl der Polstellen zu ermitteln.

Eine Bemerkung zum Grenzfall, daß auch auf der imaginären Achse der  $z$ -Ebene Pole liegen, soll den Abschluß dieses Abschnittes bilden<sup>7)</sup>. Es wird dabei eine reelle Abbildungsfunktion

<sup>6)</sup> Strecker, a. a. O., Abschn. C4.

<sup>7)</sup> A. Leonhardt, a. a. O., Bild 10, gibt hierfür ein praktisches Beispiel.



$\ddot{U}_R(z)$  vorausgesetzt. Außer einem Pol  $\beta_\infty = \begin{cases} (n-m) & \text{für } n > m \\ 0 & \text{für } n \leq m \end{cases}$ -ter Ordnung im Unendlichen, sollen an den Stellen  $i\omega_{m,k}$  ( $k = -a, -a+1, \dots, +a$ ) (mit  $\omega_{m,0} = 0$  und  $\omega_{m,k} < \omega_{m,k+1}$ ) Pole  $\beta_k$ -ter Ordnung (einschl. 0-ter Ordnung) liegen. Der Integrationsweg  $J$  umgeht diese Stellen wie in Bild 2 den Punkt  $z_{R,\varepsilon}$  durch einen Haken mit dem Radius  $\varrho$  (Zeichen:  $\dot{\omega}_{m,k}$ ). Der Radius  $S$  des Halbkreises  $iS, S, -iS$  sei so groß gewählt, daß  $S > |\omega_{m,k}|$  für alle  $k$  gilt; die Wegstücke von  $-iS$  bis  $+i\omega_{m,(-a)} - \varrho$ , von  $i\omega_{m,(-a)} + \varrho$  bis  $i\omega_{m,(-a+1)} - \varrho, \dots$  usw. seien der Reihe nach mit  $J_{(-a-1)}, J_{(-a)}, \dots, J_a$  bezeichnet.  $J$  gestattet damit die Zerlegung:

$$J = \sum_{k=-(a+1)}^a J_k + \sum_{k=-a}^a \dot{\omega}_{m,k} + (\text{Halbkreis: } iS, S, -iS) \dots \dots \dots (50).$$

Entwickelt man  $\ddot{U}_R(z)$  in der Umgebung des Poles  $i\omega_{m,k}$  in eine Laurent-Reihe, findet man dort

$$\ddot{U}_R(z) \approx \frac{K}{(z - i\omega_{m,k})^{\beta_k}} \dots \dots \dots (51).$$

Damit läßt sich entsprechend wie bei Gl. (27) das Bild des Halbkreises  $iS, S, -iS$ , das Bild des Hakens um  $i\omega_{m,k}$  in der  $\ddot{U}$ -Ebene angeben und das Integral  $(\dot{\omega}_{m,k}) \int d\Phi$  auswerten. Unter Benutzung der Bezeichnung von Gl. (24) ergibt sich daraus bei abnehmendem Hakenradius:

$$P - N = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ S \rightarrow \infty}} \int^{(J')} d\Phi = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{\varrho \rightarrow 0 \\ S \rightarrow \infty}} \left[ \sum_{k=-a-1}^a \int^{(J'_k)} d\Phi + \sum_{k=-a}^a \int^{(\dot{\omega}_{m,k})} d\Phi + \int^{(H, Krs.)} d\Phi \right] \quad (52).$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^a \int^{(0_k)} d\Phi - \sum_{k=-a}^{+a} \frac{\beta_k}{2} - \frac{\beta_\infty}{2} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} \beta_{-k} = \beta_{+k} \\ \beta_\infty = \begin{cases} (n-m) & n > m \\ 0 & n \leq m \end{cases} \end{matrix}$$

Diese Beziehung kann bereits dann nützlich werden, wenn die Übersetzung für eine endliche Frequenz sehr groß wird; den zugehörigen Wert  $\beta_k$  ermittelt man mit Hilfe des Näherungsausdruckes Gl. (51).

#### 4. Beispiel einer Stabilitätsuntersuchung beim einfachen Dreipol.

Es wird jetzt das Beispiel eines Schirmgitter-Elektronenröhrenverstärkers ohne Gitterstrom betrachtet. Die spezielle Schaltung ist in Bild 7 angegeben, sie ist in der allgemeineren Anordnung von Bild 8 enthalten.

Die Widerstandsmatrix der Schaltung nach Bild 8 lautet<sup>\*)</sup>:

$$W = \frac{\Re_1 \Re_2 \Re_3}{(\Re_1 + \Re_2)(\Re_2 + \Re_3)(\Re_4 + \Re_5) - \Re_1 \Re_3(\Re_2 S + 1)(\Re_4 + \Re_5) + \Re_2 \Re_3(\Re_1 + \Re_2)} \cdot \left\| \begin{array}{cc} -\frac{(\Re_2 + \Re_3)(\Re_4 + \Re_5) + \Re_2 \Re_3}{\Re_3} & \Re_5 \\ -\Re_5(\Re_2 S + 1) & \Re_2 \end{array} \right\| \quad (53).$$

$$\Re = \frac{[(\Re_1 + \Re_2)(\Re_2 + \Re_3) - \Re_1 \Re_3(\Re_2 S + 1)][\Re_5(\Re_4 + \Re_6) + \Re_4 \Re_6] + \Re_2 \Re_3(\Re_1 + \Re_2)(\Re_5 + \Re_6)}{\Re_1 \Re_2 \Re_3}$$

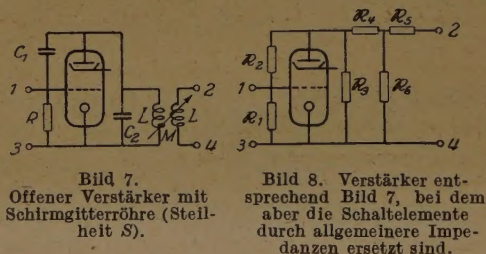
Die für die Stabilität des rückgekoppelten Apparates nach Gl. (41) entscheidende charakteristische Gleichung wird für den Spezialfall nach Bild 7, gleich in passende Form gebracht:

$$z^4 C_1 C_2 R (L^2 - M^2) + z^3 (L^2 - M^2) (C_1(1 - RS) + C_2) + z^2 R (2C_1(L - M) + C_2 L) + z(L - MRS) + R = 0 \quad (54).$$

Die Stabilitätsbedingung kann hieraus nach Hurwitz unmittelbar in Determinantenschreibweise angegeben werden; es tritt nur eine dreireihige Determinante auf, die zudem 2 Nullen in der Nebendiagonale enthält. Beachtet man, daß aus physikalischen Gründen  $R, C_1, C_2, L, (L^2 - M^2) > 0$  bleibt, entnimmt man daraus, daß der rückgekoppelte Verstärker im Falle

$$\left. \begin{aligned} & (L - MRS)(2C_1(L - M) + C_2 L)(C_1(1 - RS) + C_2) - C_1 C_2 (L - MRS)^2 \\ & - (L^2 - M^2)(C_1(1 - RS) + C_2)^2 > 0 \text{ und } L - MRS > 0 \end{aligned} \right\} \dots (55)$$

<sup>\*)</sup> Man vgl. hierzu z. B. R. Feldtkeller, a. a. O.; allerdings muß beachtet werden, daß dort immer  $-W$  benutzt wird, da die Spannungen in umgekehrter Richtung gezählt werden.





stabil arbeitet. Ist eine der Ungleichungen nicht erfüllt, so existieren anklingende Eigenschwingungen. Zum Abschluß soll noch die Übersetzung des Gerätes beim Abschlußwiderstand  $\Re_A = \Re_{11} + \Re_{12}$  angegeben werden:

$$\ddot{u}_R(z) = \frac{z^2 M C_1 R + z M R S}{z^4 (L^2 - M^2) R C_1 C_2 + z^3 (L^2 - M^2) (C_1 (1 - RS) + C_2) + z^2 R (L (2 C_1 + C_2) - M C_1) + z L + R} \quad (56).$$

### 5. Die Stabilitätsuntersuchung mit Hilfe einer Ortskurve<sup>9)</sup>.

Es wird hier eine Schaltung mit Schirmgitterröhre entsprechend Bild 9 betrachtet. Die Gitterzuleitung ist an der in der Figur markierten Stelle aufgeschnitten und die Spannungsübersetzung bei unendlich großem Abschlußwiderstand gemessen. Da auch der Eingangswiderstand unendlich groß sein soll, kann die Aufgabe als ein dimensionales Problem behandelt werden. In Bild 9 ist die Ortskurve

